MECANIQUE DU SOLIDE

NIVEAU 1

LA STATIQUE

CORRIGE

CORRIGE

Code du dispositif: 08A01003254 Module : 19607

Auteur : Serge Muret - 2008

Table des matières

REFERENTIEL DE CERTIFICATION 3

Savoirs technologiques associés 4
Mise en relations des compétences et des savoirs technologiques associés 5
Spécification des niveaux d'acquisition et de maîtrise des savoirs 6

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA STATIQUE GRAPHIQUE 7

Qu'est-ce qu'une force ? 8
Principe d'action mutuelle (action et réaction) 8
Equilibre de deux forces 8
Equilibre de trois forces coplanes 9
Exercices d'application 10
Théorème fondamental de l'équilibre 11
Recensement des forces extérieures 13
Systèmes isostatiques - systèmes hyperstatiques 14

APPLICATIONS DE LA STATIQUE GRAPHIQUE 17

Recherche de la résultante d'un système de forces coplanes 18
Exercice d'application: méthode 23
Exercice d'application: Potence 1 26
Exercice d'application: Potence 2 28
Exercice d'application: Chêvre pour puits 30
Exercice d'application : Dispositif de levage 33
Exercice d'application : Pince multiprise 36
Exercice de contrôle: Echelle double 38
Exercice de contrôle: Echelle double 42
Recherche des réactions d'appui d'une poutre 46
Méthode du crémona 50

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS 57

Centre de gravité 58
Moment statique 61
Moment quadratique (ou moment d'inertie) 63

STATIQUE RESOLUTION ANALYTIQUE 69

Principe 70
Application pratique 70
Rappel : Moment d'un vecteur par rapport à un point 71
Rappels 72
Exercices d'application 73

CORRIGE

REFERENTIEL DE CERTIFICATION

CORRIGE

Savoirs technologiques associés

EXTRAIT

S 4	La mécanique et la résistance des matériaux	1	2	3	4
S 4.1	Le système constructif de l'ouvrage				
	4.11 - Les spécifications du système				
	Éléments constitutifs				
	Spécifications dimensionnelles				
	Spécifications géométriques				
	4.12 - Les charges				
	Charges ponctuelles				
	Charges uniformément réparties				
	Charges permanentes				
	Charges d'exploitation				
	4.14 - La modélisation du système				
	Isolement d'un sous-système				
	Bilan des actions extérieures				
	Fonctionnement mécanique du système				
	Modélisation				
	4.21 - Les forces				
	Représentation vectorielle d'une force				
	Composantes d'une force				
	Résultante d'un système de forces				
	Systèmes à forces parallèles				
	Équilibre statique : principe fondamental de la statique :				
	- équilibre d'un point				
	- moment d'une force				
	- notion de couple				
	4.22 - Les systèmes soumis à l'action de deux forces				
	Forces opposées				
	Principe des actions mutuelles				
	4.23 - Les systèmes soumis à l'action de trois forces				
	Forces concourantes				
	Notion d'échelle (intensité, dimension)				
	4.24 - Les efforts dans les éléments d'un système triangulé				
	Résolution graphique				
	Résolution analytique				
	Résolution informatique				

CORRIGE

Mise en relations des compétences et des savoirs technologiques associés

	COMPÉTENCES	SAVOIRS TECHNOLOGIQUES ASSOCIÉS								
		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
C1	1 - Décoder et analyser les données de définition	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	2 - Décoder et analyser les données opératoires	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	3 - Décoder et analyser les données de gestion	X	X	X	X	X	X	X		X
	4 - Relever et réceptionner une situation de chantier	X	X	X		X	X	X	X	X
C2	1 - Choisir et adapter des solutions techniques		X	X	X	X	X	X		X
	2 - Établir les plans et tracés d'exécution d'un ouvrage		X	X	X	X	X	X		X
	3 - Établir les quantitatifs de matériaux et composants		X	X	X	X	X	X		X
	4 - Établir le processus de fabrication, de dépose et de pose		X	X	X	X	X	X	X	X
	5 - Établir les documents de suivi de réalisation		X	X	X	X	X	X	X	X
C3	1 - Organiser et mettre en sécurité les postes de travail	X					X	X	X	X
	2 - Préparer les matériaux, quincailleries et accessoires		X	X		X	X	X	X	X
	3 - Installer et régler les outillages		X				X	X	X	X
	4 - Conduire les opérations d'usinage : machines conventionnelles, P.N., C.N.		X				X	X	X	X
	5 - Conduire les opérations de mise en forme et de placage						X	X	X	X
	6 - Conduire les opérations de montage et de finition						X	X	X	X
C4	1 - Organiser et mettre en sécurité la zone d'intervention	X						X	X	X
	2 - Contrôler la conformité des supports et des ouvrages	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	3 - Implanter, distribuer les ouvrages	X	X	X		X	X	X	X	X
	4 - Préparer, adapter, ajuster les ouvrages	X	X	X		X	X	X	X	X
	5 - Conduire les opérations de pose sur chantier	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6 - Installer les équipements techniques, les accessoires	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	7 - Assurer les opérations de finition périphériques à l'ouvrage	X		X		X	X	X	X	X
	8 - Gérer la dépose des ouvrages et l'environnement du chantier	X	X	X		X	X	X	X	X
C5	1 - Assurer la maintenance périodique des ouvrages	X	X			X	X	X	X	X
	2 - Maintenir en état, les matériels, les équipements et les outillages	X	X					X	X	X
C6	1 - Animer une équipe	X	X							
	2 - Animer les actions qualité et sécurité	X	X						X	X
	3 - Communiquer avec les différents les partenaires	X	X							
	4 - Rendre compte d'une activité	X	X							

CORRIGÉ

Spécification des niveaux d'acquisition et de maîtrise des savoirs

Indicateur de niveau d'acquisition et de maîtrise des savoirs	NIVEAU 1 2 3 4
Le candidat a reçu une information minimale sur le concept abordé et il sait, d'une manière globale, de quoi il s'agit. Il peut donc par exemple identifier, reconnaître, citer, éventuellement désigner un élément, un composant au sein d'un système, citer une méthode de travail ou d'organisation, citer globalement le rôle et la fonction du concept appréhendé.	**Niveau d'INFORMATION**
Ce niveau est relatif à l'acquisition de moyens d'expression et de communication en utilisant le registre langagier de la discipline. Il s'agit à ce niveau de maîtriser un savoir relatif à l'expression orale (discours, réponses orales, explications) et écrite (textes, croquis, schémas, représentations graphiques et symboliques en vigueur). Le candidat doit être capable de justifier l'objet de l'étude en expliquant par exemple un fonctionnement, une structure, une méthodologie…	**Niveau d'EXPRESSION**
Cette maîtrise porte sur la mise en œuvre de techniques, d'outils, de règles et de principes en vue d'un résultat à atteindre. C'est le niveau d'acquisition de savoir-faire cognitifs (méthode, stratégie…). Ce niveau permet donc de simuler, de mettre en œuvre un équipement, de réaliser des représentations, de faire un choix argumenté...	**Niveau de la MAÎTRISE D'OUTILS**
Il vise à poser puis à résoudre les problèmes dans un contexte global industriel. Il correspond à une maîtrise totale de la mise en œuvre d'une démarche en vue d'un but à atteindre. Il intègre des compétences élargies, une autonomie minimale et le respect des règles de fonctionnement de type industriel (respect de normes, de procédures garantissant la qualité des produits et des services).	**Niveau de la MAÎTRISE MÉTHODOLOGIQUE**

CORRIGE

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA STATIQUE GRAPHIQUE

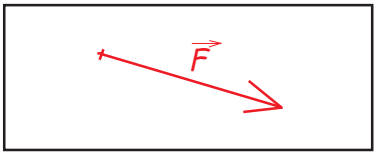
CORRIGE

Qu'est-ce qu'une force ?

Une force est définie par : (voir fig 1)

- ..Un point d'application.....
- ..Une direction.....
- ..Un sens.....
- ..Une intensité.....

fig 1

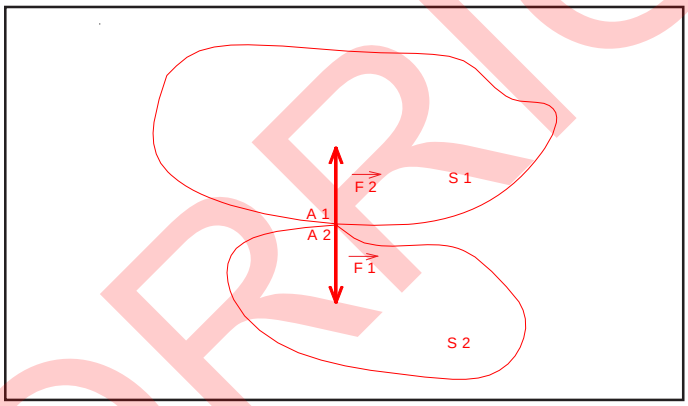


Principe d'action mutuelle (action et réaction)

Lorsqu'un corps S1 exerce une action se traduisant par une force $\vec{F1}$ sur un corps S2, alors réciproquement le corps S2 exerce sur le corps S1 une force $\vec{F2}$ égale et directement opposée à $\vec{F1}$ (voir fig 2)

$\vec{F1}$ est appliquée .....au point A2 appartenant à S2.....
$\vec{F2}$ est appliquée.....au point A1 appartenant à S1.....
Les 2 points A1 et A2 sont.....en contact.....

fig 2

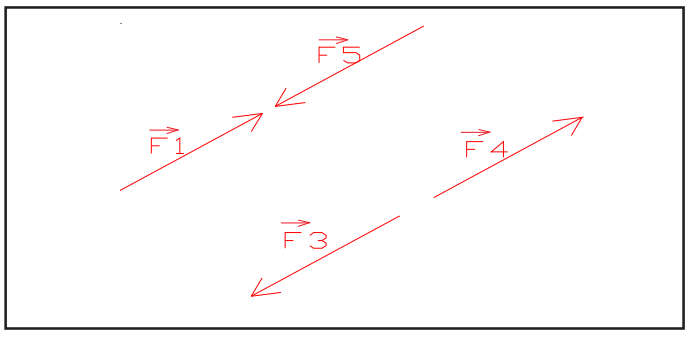


Equilibre de deux forces

Pour qu'un solide sollicité par 2 forces soit en équilibre, il faut et il suffit que ces 2 forces soient égales et directement opposées, c'est à dire qu'elle aient : (voir fig 3)

- même .....support.....
- même .....intensité.....
- mais .....sens opposé.....

fig 3



CORRIGE

Equilibre de trois forces coplanes

Pour qu'un solide, sollicité par trois forces coplanes (forces situées dans un même plan) non parallèles, soit en équilibre, il faut et il suffit que : (voir fig 4)

- *les supports soient concourants*
et
- *que leur somme algébrique soit nulle*

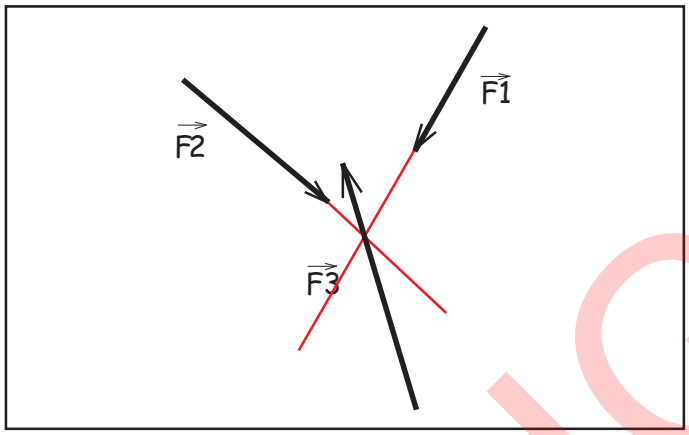


fig 4

ou bien que le polygone des forces soit fermé : (voir fig 5)

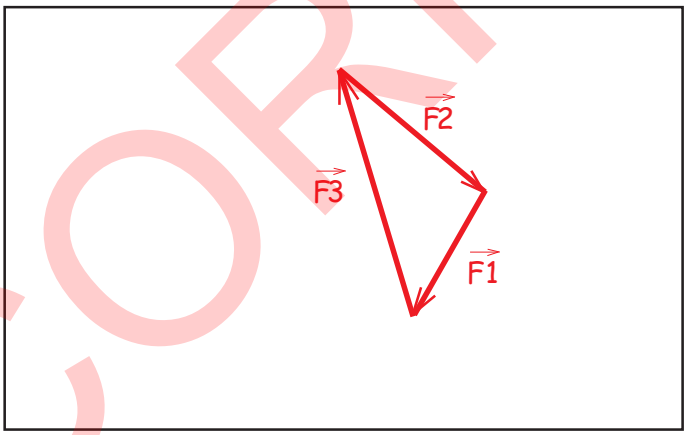


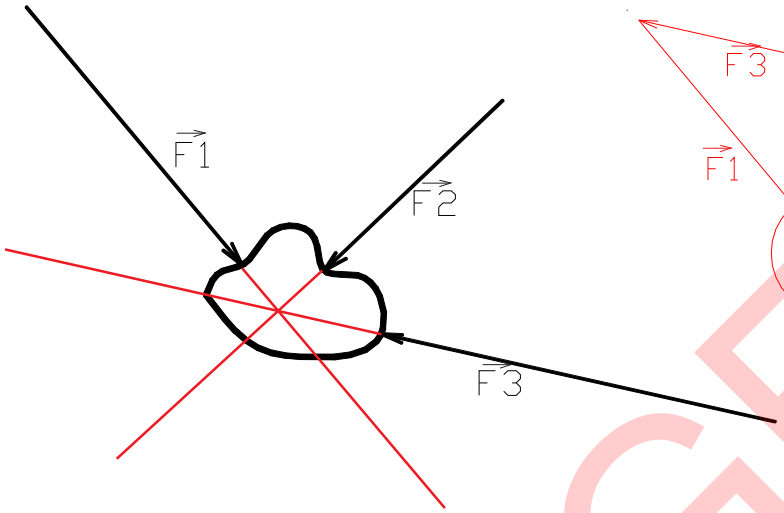
fig 5

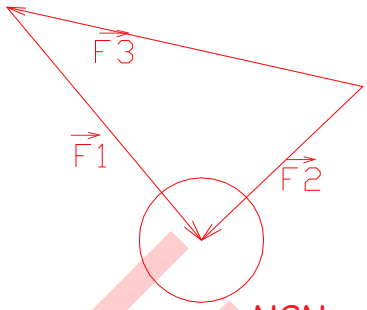
Remarque: quand 3 forces sont en équilibre, si 2 d'entre elles sont parallèles alors la troisième est *parallèle*

CORRIGE

Exercices d'application

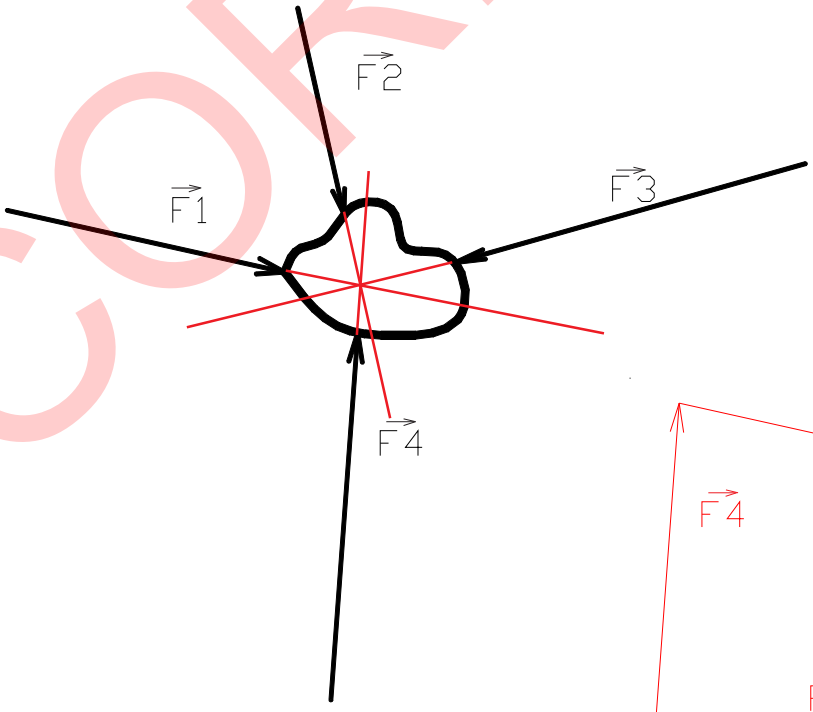
1 - Le solide ci dessous est-il en équilibre sous l'action de 3 forces coplanes $\vec{F1}$ $\vec{F2}$ et $\vec{F3}$?



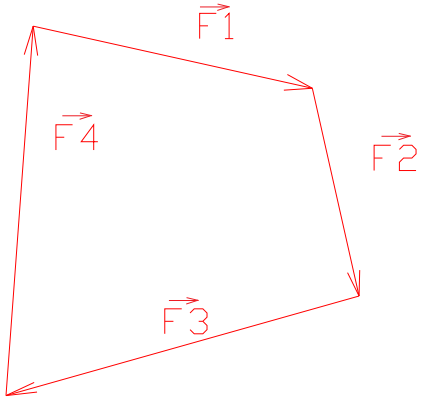


NON

2 - Le solide ci dessous est-il en équilibre sous l'action de 4 forces coplanes $\vec{F1}$ $\vec{F2}$ $\vec{F3}$ et $\vec{F4}$?



OUI



CORRIGE

Théorème fondamental de l'équilibre

Pour qu'un solide matériel indéformable, sollicité par plusieurs forces quelconques, soit en équilibre il faut et il suffit :

- *que la résultante générale de ces forces soit nulle.*

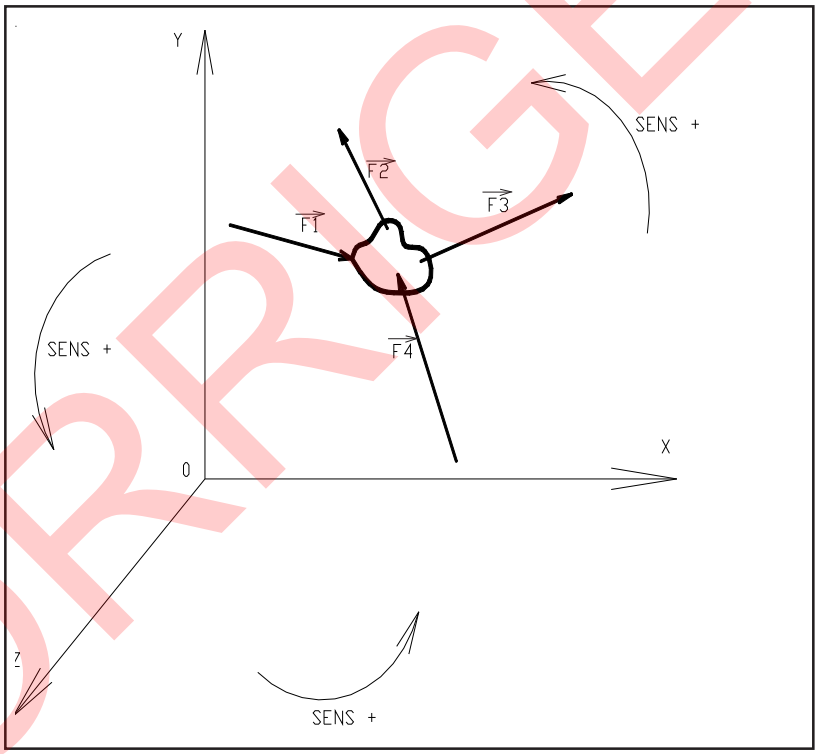
- *que le moment résultant par rapport à un point quelconque soit nul.*

Modalités d'application de ce théorème

a) Cas général

Soit un solide matériel indéformable quelconque sollicité par les forces $\overrightarrow{F1}$, $\overrightarrow{F2}$, $\overrightarrow{F3}$, ...réparties d'une manière quelconque dans l'espace (voir fig 6)

fig 6



Choisissons un système de référence 0 XYZ

La première condition du théorème : *Résultante générale des forces égale à 0*
se traduit par les 3 équations suivantes :

1 - *Somme algébrique des projections des forces sur l'axe OX soit égale à 0*
2 - *Somme algébrique des projections des forces sur l'axe OY soit égale à 0*
3 - *Somme algébrique des projections des forces sur l'axe OZ soit égale à 0*

La deuxième condition du théorème : *Moment résultant /un point quelconque égale à 0*
se traduit par les 3 équations suivantes :

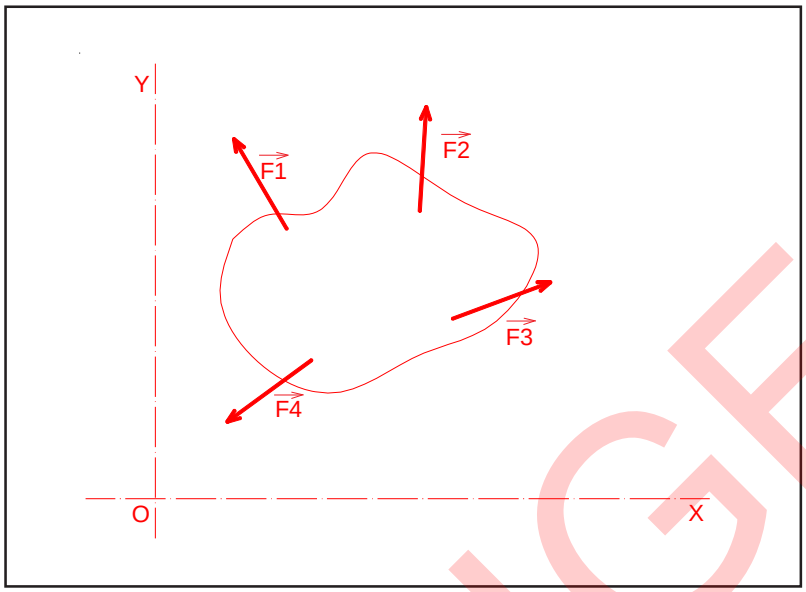
1 - *Somme algébrique des moments des forces / OX soit égale à 0*
2 - *Somme algébrique des moments des forces / OY soit égale à 0*
3 - *Somme algébrique des moments des forces / OZ soit égale à 0*

CORRIGE

b) Cas particulier

dans le cas de forces coplanes les calculs pourront être simplifiés :
Pour cela choisir un système d'axes 0X et 0Y dans le plan des forces (voir fig 7)

fig 7



Dans ces conditions nous constatons :

- *Somme algébrique des projections des forces sur l'axe OZ est toujours égale à 0*

- *Sommes algébriques des moments des forces / OX et OY sont toujours égale à 0*

Conclusion

- *Dans le cas de forces coplanes, l'équilibre d'un système indéformable se traduit par l'écriture de 2 équations de projection et 1 équation de moments.*

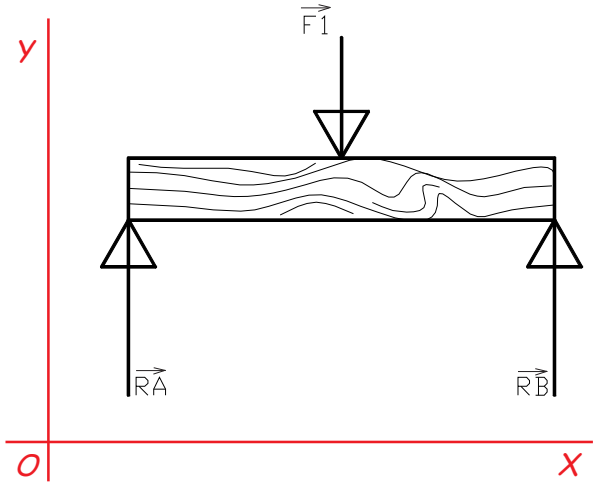
Exercices

Une poutre en bois est sollicitée par trois forces coplanes $\vec{F1}$, $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$.

Tracer les deux axes 0X et OY

Ecrire les trois équations nécessaires pour que cette poutre soit en équilibre :

Somme algébrique sur OX = 0
Somme algébrique sur OY = 0
Somme algébrique des moments / OZ = 0



CORRIGE

Recensement des forces extérieures

1 - Forces extérieures appliquées à chacune des molécules de ce solide sans le toucher

- *La pesanteur*
- *Les forces électromagnétiques*

2 - Forces extérieures produit par un contact avec un autre solide

2.1 - Appui simple ou appui libre

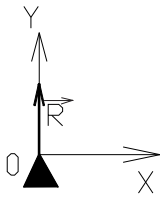
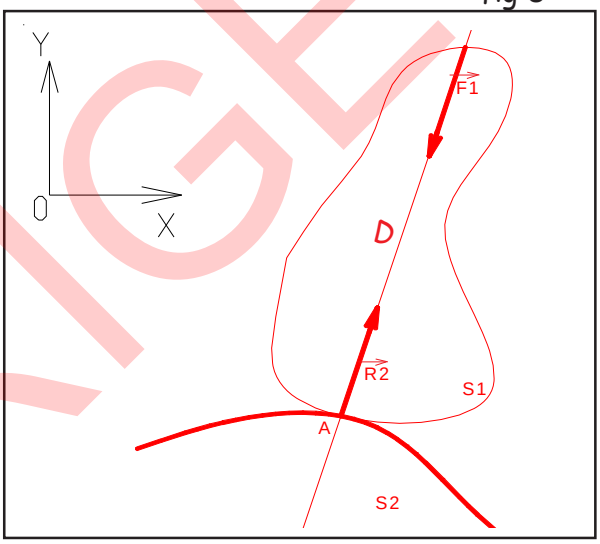


fig 8



Le solide étudié est en appui simple sur le support si le contact peut être supposé ponctuel et à lieu sans frottement.

Le point d'application de l'action est connu
c'est le point A

le support de l'action est connu
La droite D

seule l'intensité de l'action est inconnue

Appui simple = 1 inconnue

2.2 - Articulation cylindrique

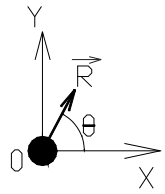
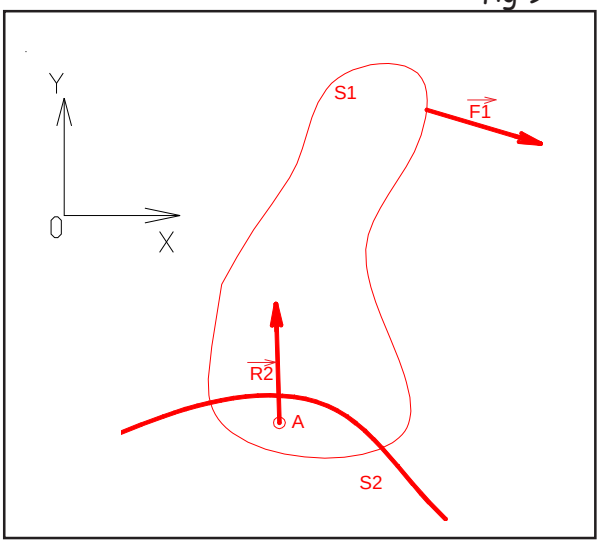


fig 9



Le solide étudié est dit articulé si le contact avec le support s'effectue suivant une portion de surface cylindrique.

Le point d'application de l'action est connu
c'est le point A

On ne connaît ni la direction ni l'intensité

Articulation = 2 inconnues

COPRIGE

2.3 - Encastrement

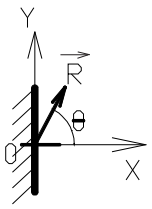


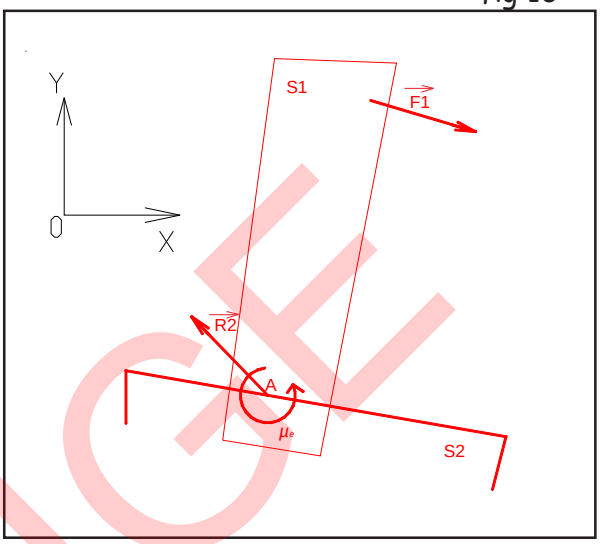
fig 10

Le solide étudié est dit encastré avec le support si les contacts sont tels qu'ils empêchent tout déplacement du système.

Le point d'application de l'action est connu
c'est le point A

On ne connaît ni la direction ni l'intensité de l'action de contact; de plus il existe aussi un couple ou moment d'encastrement μ_e

Encastrement = 3 inconnues



Systèmes isostatiques - systèmes hyperstatiques

1 - Nous ne considérons que les forces coplanes. Nous savons que dans ce cas le nombre d'équations est au plus égal à *3*

Si les action de contact des appuis introduisent 3 inconnues, le problème est possible et n'admet qu'une solution. Le système est dit *ISOSTATIQUE (et n'admet qu'une solution)*

Si les actions de contact introduisent plus de 3 inconnues, le problème est mathématiquement indéterminé. Le système est dit *HYPERSTATIQUE (mathématiquement indéterminé)*

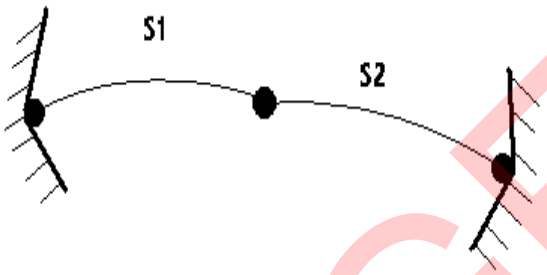
En réalité, l'indétermination n'est qu'apparente quand il s'agit de système matériel. En effet le système matériel se déforme sous l'action des forces et l'étude des déformations permettra d'écrire des équation supplémentaires.

CORRIGE

2 - Degrés de liberté : Dans le plan un solide possède 3 degrés de liberté

- l'appui simple enlève *1 degré de liberté*
- l'articulation enlève *2 degrés de liberté*
- l'encastrement enlève *3 degrés de liberté*

2.1 - Combien de degrés de liberté reste t'il à ce système matériel composé de 2 solides ?

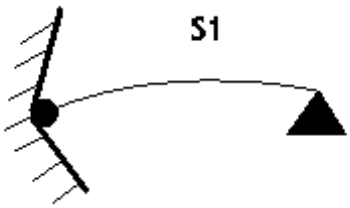


Nombre de solides S = *2*
Nombre de degrés au total Dt = *2 x 3*
Nombre de degrés de liberté en moins L = *2 + 2 + 2*

Nombre de dgrés - Nombre de degrés de liberté en moins = Dt - L = *6 - 6 = 0*

c'est donc *un système ISOSTATIQUE*

2.2 - Combien de degrés de liberté reste t'il à ce système matériel composé de 1 solide ?



Nombre de solides S = *1*
Nombre de degrés au total Dt = *1 x 3*
Nombre de degrés de liberté en moins L = *2 + 1*

Nombre de dgrés - Nombre de degrés de liberté en moins = Dt - L = *3 - 3 = 0*

c'est donc *un système ISOSTATIQUE*

CORRIGE

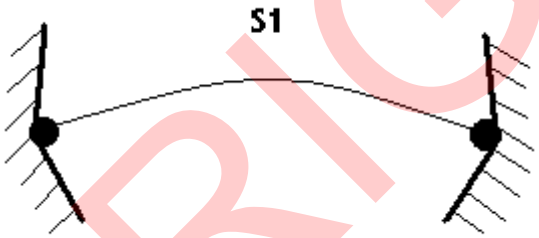
2.3 - Combien de degrés de liberté reste t'il à ce système matériel composé de 1 solide ?

Nombre de solides S = 1
Nombre de degrés au total Dt = 1 x 3
Nombre de degrés de liberté en moins L = 1 + 1

Nombre de dgrés - Nombre de degrés de liberté en moins = Dt - L = 3 - 2 = 1

c'est donc *un système MECANIQUE*

2.4 - Combien de degrés de liberté reste t'il à ce système matériel composé de 1 solide ?

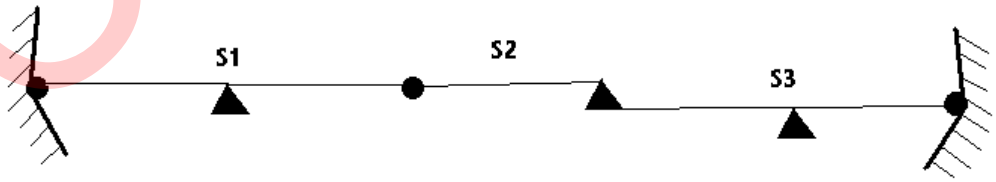


Nombre de solides S = 1
Nombre de degrés au total Dt = 1 x 3
Nombre de degrés de liberté en moins L = 2 + 2

Nombre de dgrés - Nombre de degrés de liberté en moins = Dt - L = 3 - 4 = -1

c'est donc *un système HYPERSTATIQUE*

2.5 - Combien de degrés de liberté reste t'il à ce système matériel composé de 3 solides ?



Nombre de solides S = 3
Nombre de degrés au total Dt = 3 x 3
Nombre de degrés de liberté en moins L = 2 + 1 + 2 +1 + 1 + 2

Nombre de dgrés - Nombre de degrés de liberté en moins = Dt - L = 9 - 9 = 0

c'est donc *un système ISOSTATIQUE*

CORRIGE

APPLICATIONS DE LA STATIQUE GRAPHIQUE

CORRIGE

Recherche de la résultante d'un système de forces coplanes

Soit un système de forces coplanes quelconques $\vec{F1}$, $\vec{F2}$, $\vec{F3}$, $\vec{F4}$ (voir fig11)

fig 11

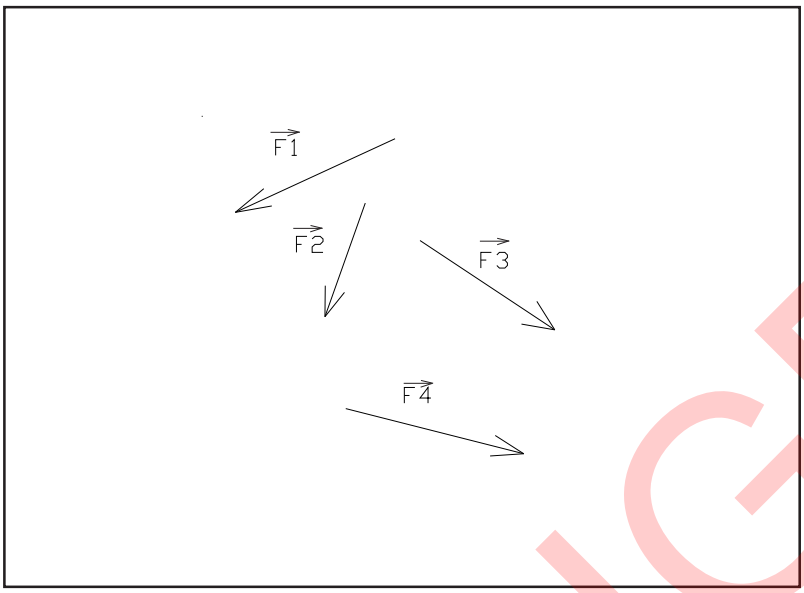
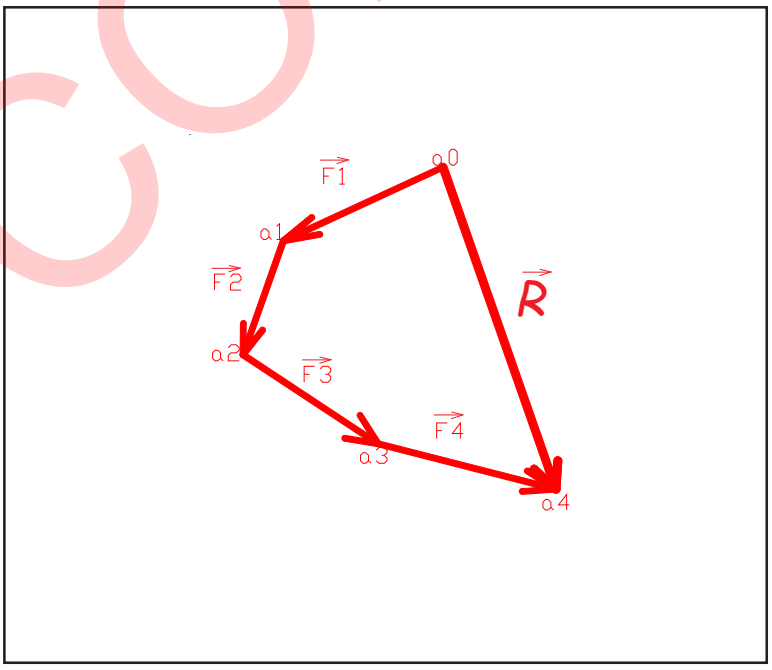


Figure de position,
échelle des longueurs = x mm pour 1mm

A partir d'un point quelconque du plan des forces, le point a0, on construit le polygone des forces a0 a1 a2 a3 a4 en reportant bout à bout, dans un ordre choisi, à une échelle choisie, les vecteurs a0a1, a1a2, a2a3, a3a4 équipollants aux forces donnée $\vec{F1}$, $\vec{F2}$, $\vec{F3}$, $\vec{F4}$.

Le vecteur a0a4, somme géométrique des vecteurs constituant le polygone, est équipollent à la résultante $\vec{R}$ des forces données (voir fig 12)

fig 12



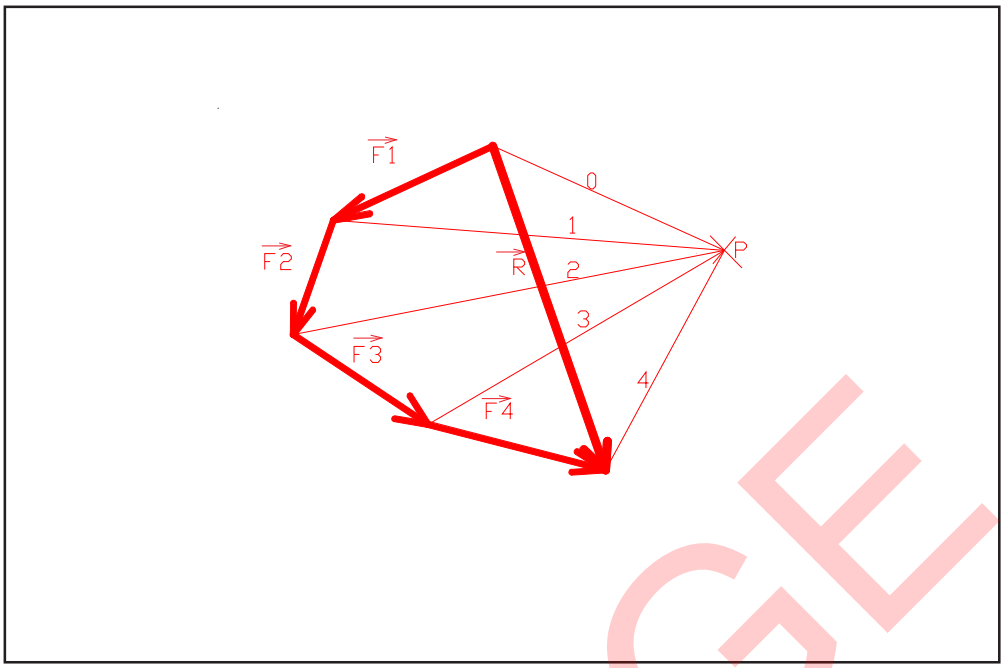
Dynamique
polygone des forces

échelle des forces

CORRIGE

La position du support s'obtient : choisir un point P quelconque (appelé pôle) et tracer les rayon polaires pa0, pa1, pa2, pa3, pa4 auquels on affecte des numéros 0,1,2,3,4. (voir fig 13)

fig 13



Dynamique - polygone des forces
échelle des forces = x mm pour 1 N

Par un point quelconque de la figure de position, tracer la droite 0' // au rayon polaire 0; par la point de rencontre de 0' et le support $\overrightarrow{F1}$ tracer la droite 1' // au rayon polaire 1; par le point de rencontre de 1' avec le support $\overrightarrow{F2}$ tracer la droite 2' // au rayon polaire 2; et ainsi de suite. Le polygone des cotés 0'1'2'3'4' s'appelle le ....Funiculaire.....

Soit le point I intersection des cotés extrêmes 0' et 4'; ce point I est un point du support de la résultante $\overrightarrow{R}$ // à la droite a0a4 (voir fig 14)

fig 14

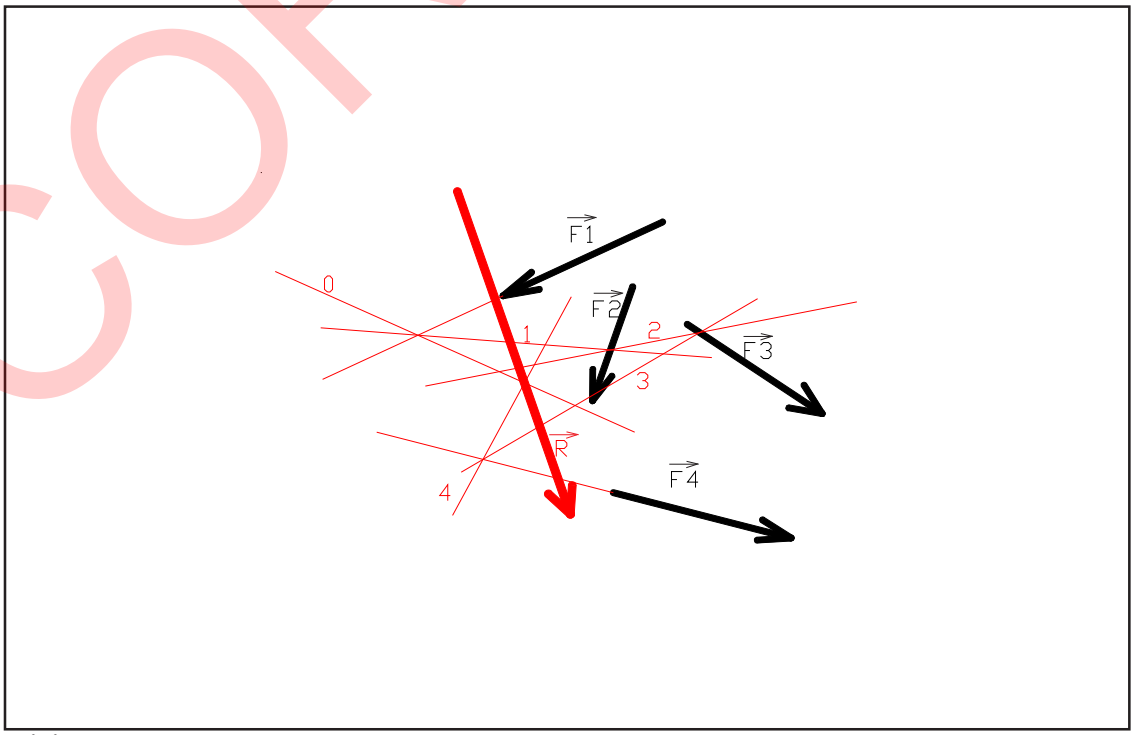


Figure de position,
échelle des longueurs = x mm pour 1mm

CORRIGE

Exercice 1

Tracer le dynamique des forces $\vec{F1}$ $\vec{F2}$ $\vec{F3}$ $\vec{F4}$ de la fig 15 dans le cadre de la fig 16

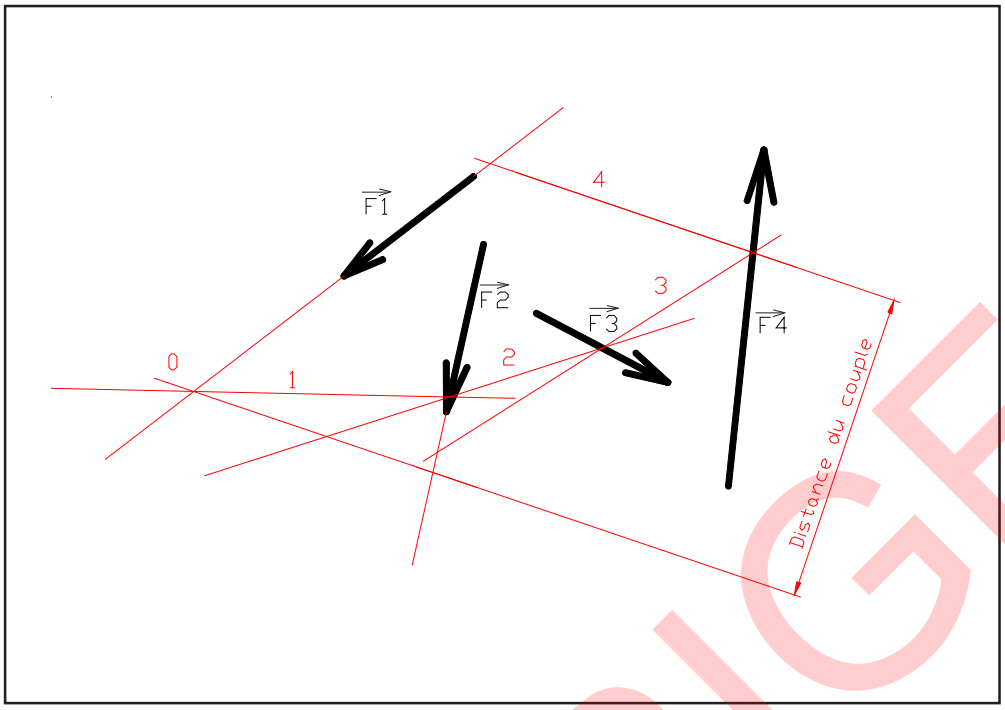


fig 15

Déterminer la résultante des forces $\vec{R}$
Tracer le funiculaire sur la fig 16 et déterminer la position de cette résultante sur la fig 15

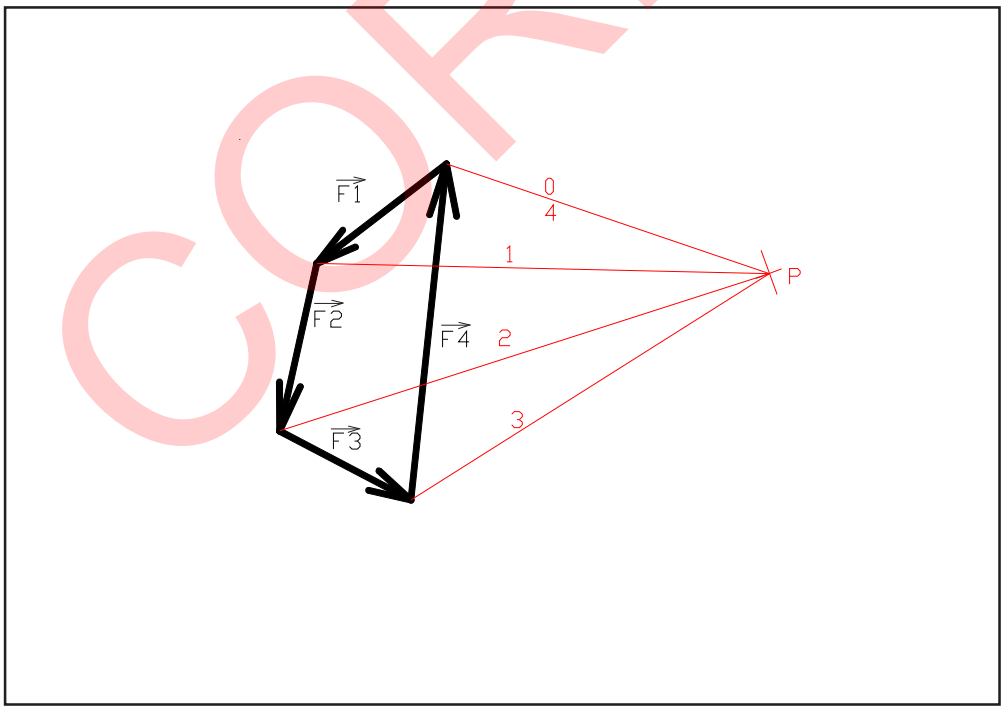


fig 16

Conclusion : *Quand un système de forces est tel que le polygone des forces est fermé (la résultante est nulle), il serait faux d'en conclure que le système est en équilibre. Le système de force peut être équivalent à un couple.*

Nota : les directions des forces ne sont pas concourantes.

CORRIGE

Exercice 2

Tracer le dynamique des forces parallèles $\vec{F1}$ $\vec{F2}$ $\vec{F3}$ $\vec{F4}$ de la fig 17 dans le cadre de la fig 18

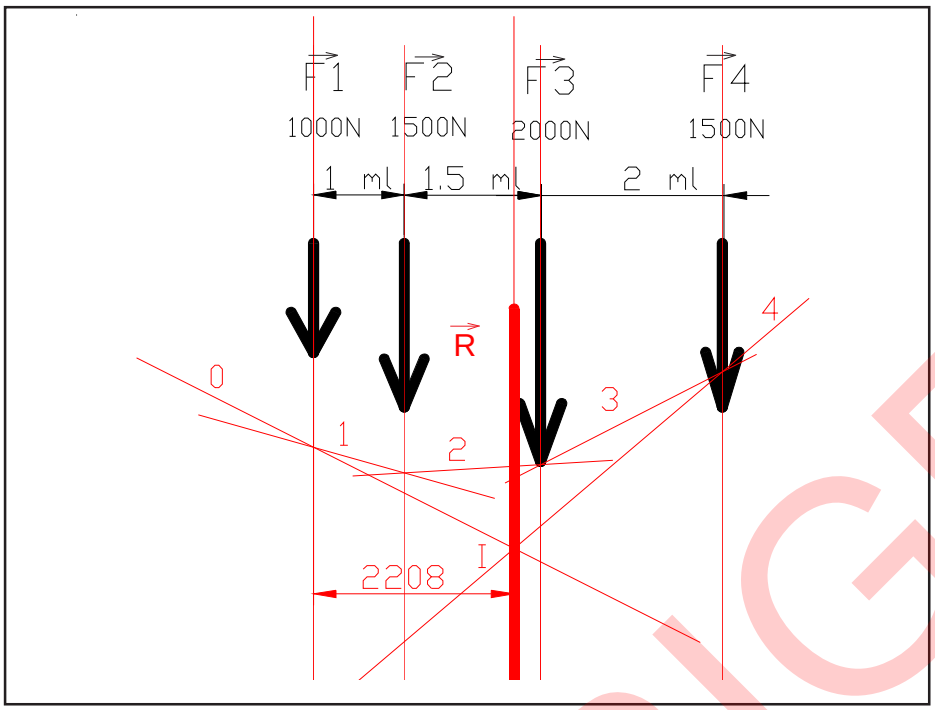


fig 17

Echelle des longueurs
12 mm / m

Déterminer la résultante des forces $\vec{R}$
Tracer le funiculaire sur la fig 18 et déterminer la position de cette résultante sur la fig 17

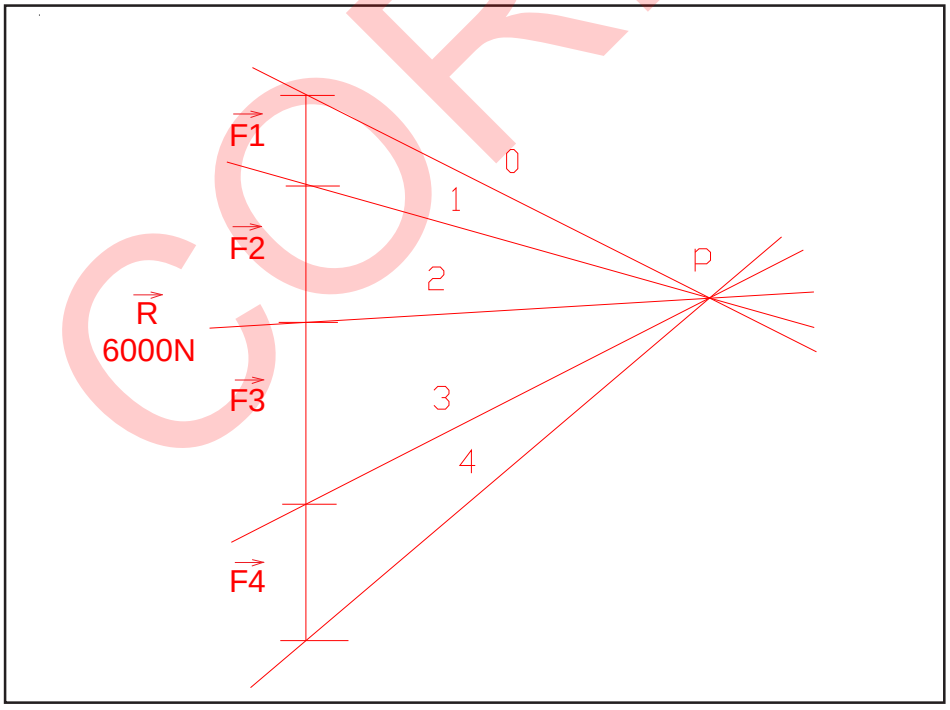


fig 18

Echelle des forces
0,012 mm / N

Conclusion : *Sur cet exercice il faut travailler avec les échelles de longueurs et de forces*
R = 6 000 N situé à 2 208 mm de F1
Corrigé réalisé avec un logiciel de DAO

CORRIGE

Exercice 3

Tracer le dynamique des forces parallèles $\vec{F1}$ $\vec{F2}$ $\vec{F3}$ $\vec{F4}$ $\vec{F5}$ de la fig 19 dans le cadre de la fig 18

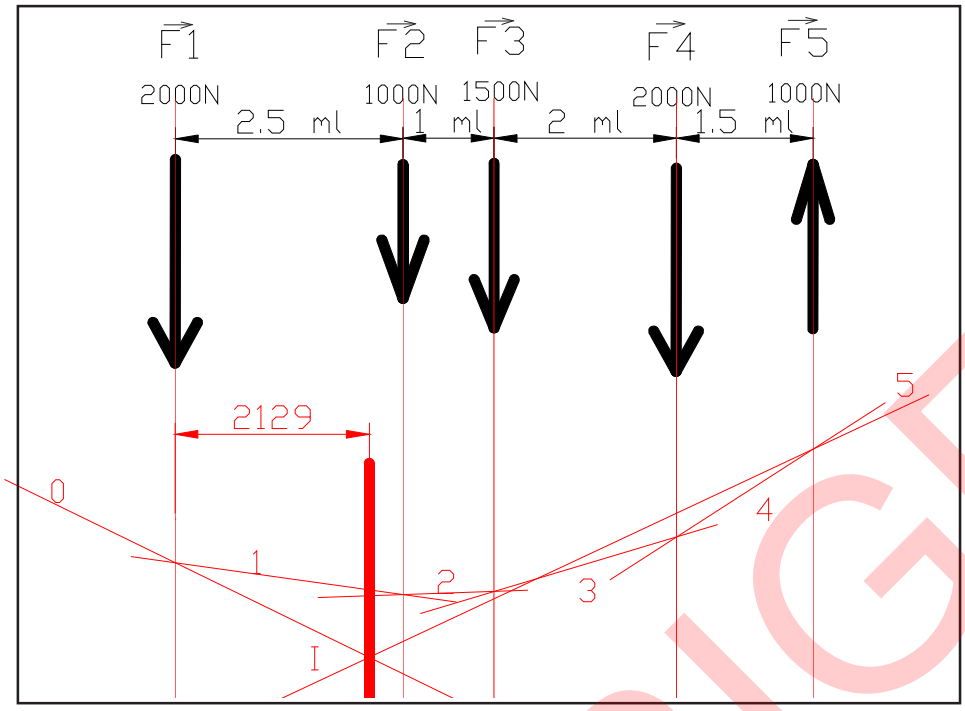


fig 19

Echelle des longueurs
12 mm / m

Déterminer la résultante des forces $\vec{R}$
Tracer le funiculaire sur la fig 20 et déterminer la position de cette résultante sur la fig 19

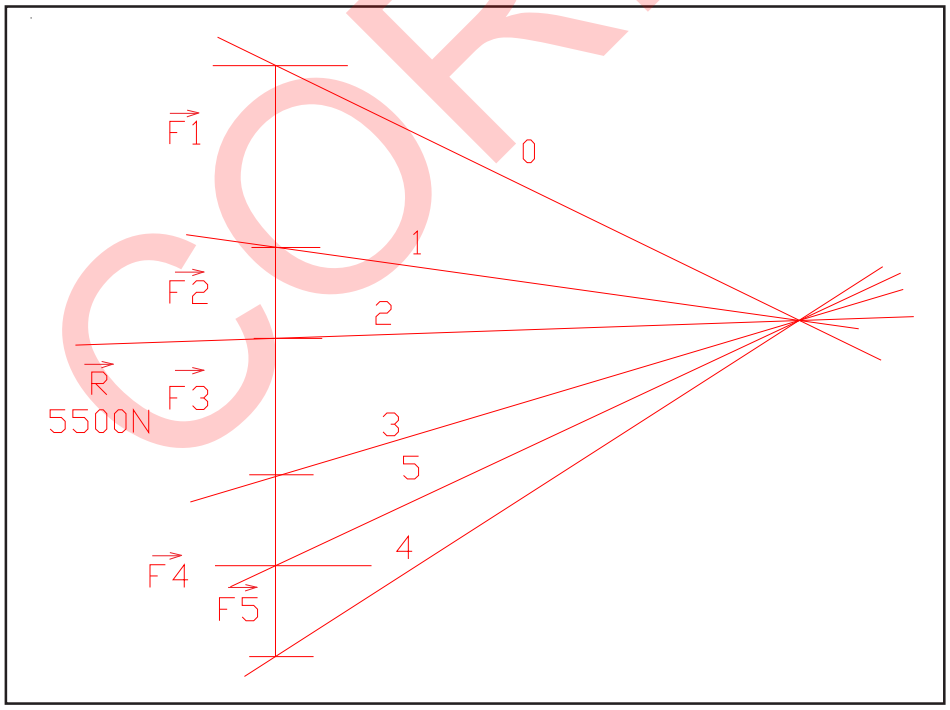


fig 20

Echelle des forces
0,012 mm / N

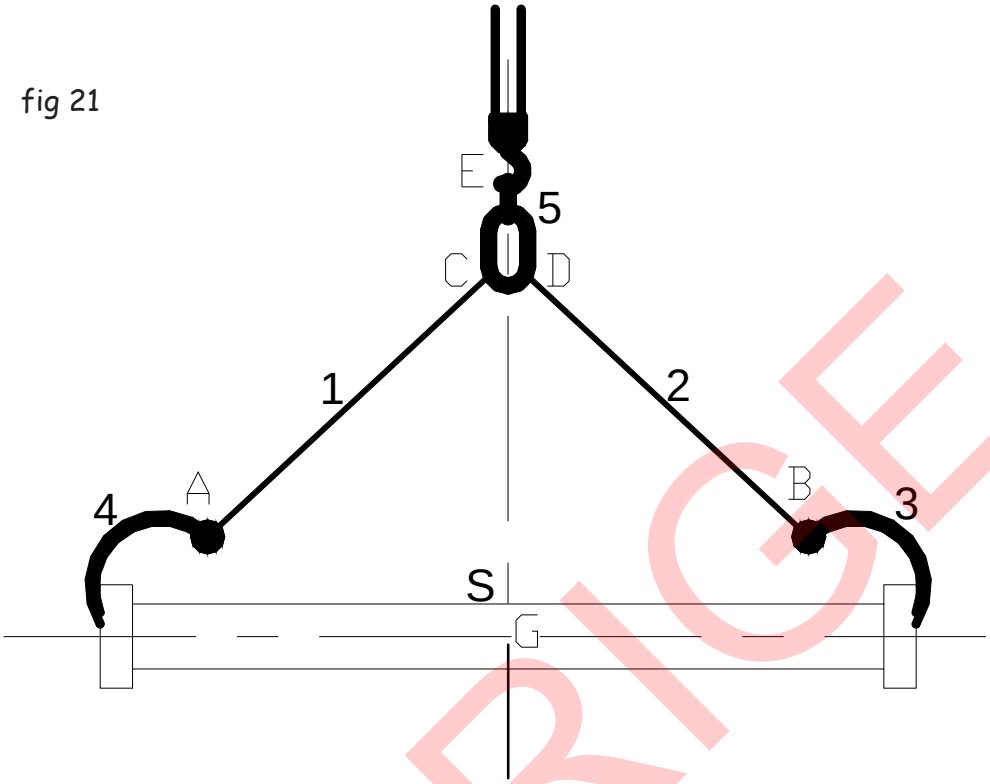
Conclusion : *Sur cet exercice il faut travailler avec les échelles de longueurs et de forces*
R = 5 500 N situé à 2 129 mm de F1
Corrigé réalisé avec un logiciel de DAO

CORRIGE

Exercice d'application: méthode

GRUE DE LEVAGE

fig 21



CORRIGE

Le solide repéré S est soulevé par l'intermédiaire des deux élingues 1 et 2. Les élingues sont liées aux points C et D sur l'anneau de levage repéré 5, et aux points A et B sur les crochets repérés 3 et 4 placés aux deux extrémités du solide S.

Les liaisons en A, B, C et D sont des liaisons pivots.

On suppose que l'ensemble du dispositif est immobile dans la position de la fig 21

ETUDE STATIQUE

Les poids des solides 1, 2, 3, 4 et 5 sont négligés. Le poids du solides S sera schématisé par un vecteur poids $\overrightarrow{P}$ de 800 daN, vertical et passant par G (centre de gravité du solide S).

L'action mécanique exercée en A par l'élingue 1 sur le crochet 4 sera schématisé par un vecteur force passant par A et noté $\overrightarrow{FA}_{1/4}$.

De même les actions mécaniques exercées en B, C, D et E seront schématisées par des vecteurs forces passant par les point B, C, D et E et seront notés $\overrightarrow{FB}_{2/3}$ $\overrightarrow{FC}_{1/5}$ $\overrightarrow{FD}_{2/5}$ et $\overrightarrow{FE}_{5/0.}$

Afin de choisir les éléments 1, 2, 3, 4 et 5 on demande :

1 - Isoler les cables 1 et 2 (voir fig 22 et 23). Faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent.
2 - Isoler l'ensemble S + 3 + 4 (voir fig 24). Faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent.Tracer le dynamique échelle des forces 10 mm pour200 daN
2 - Isoler l'ensemble S + 1 +2 + 3 + 4 + 5 (voir fig 25). Faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent.

Combien de degrés de liberté reste t'il à ce système matériel composé de 2 solides ?

fig 22

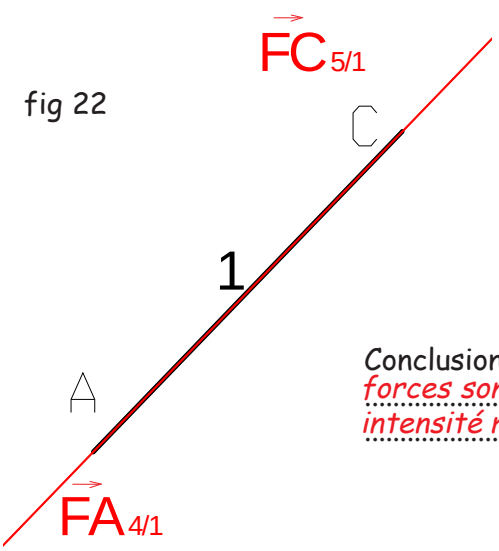
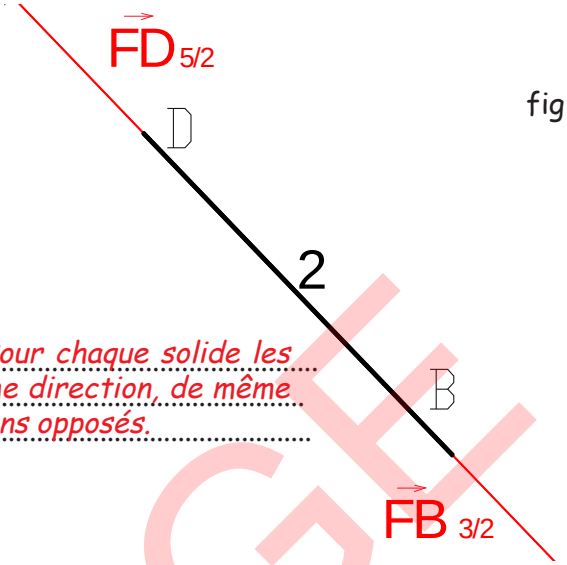
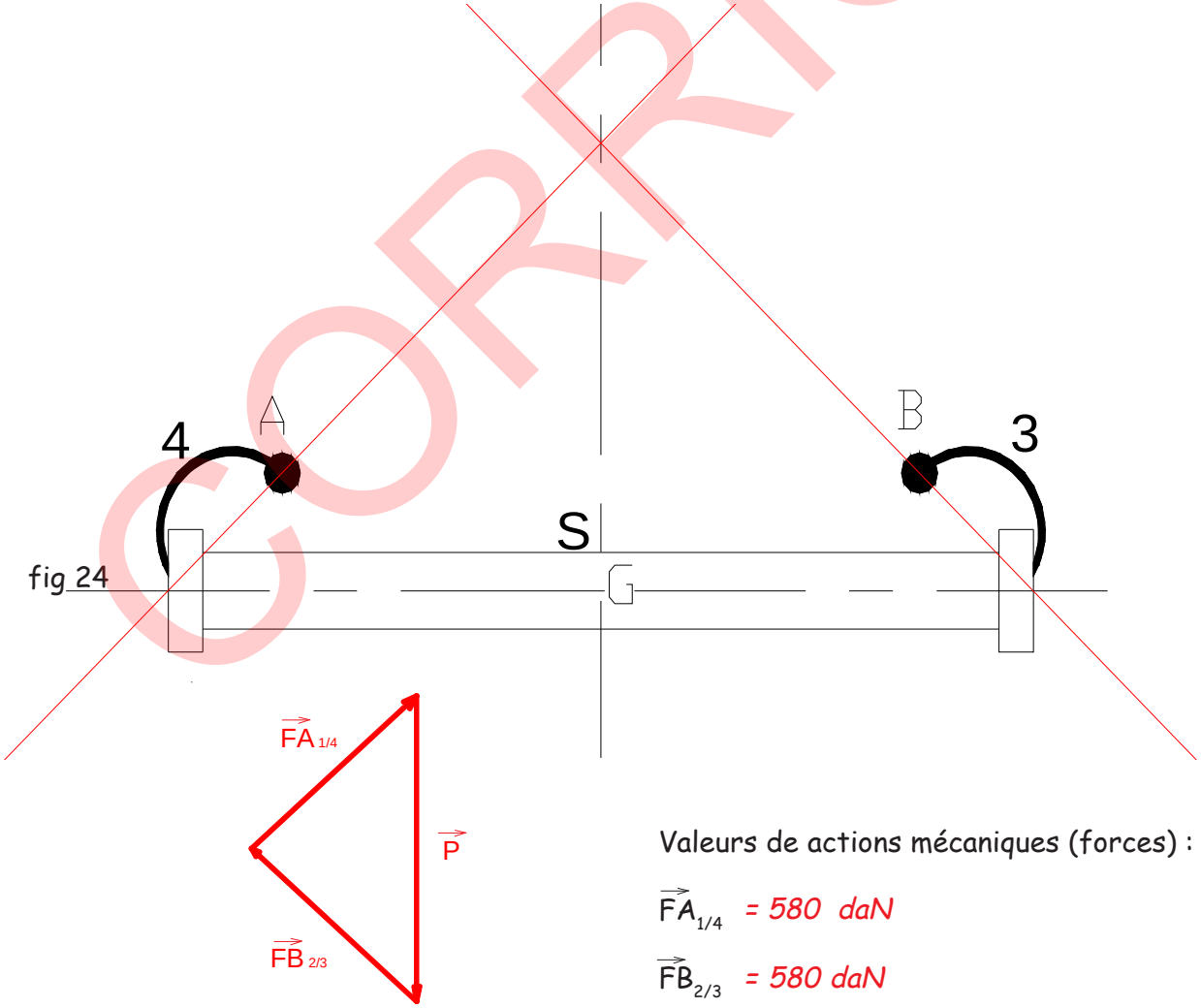


fig 23



Conclusions : *Pour chaque solide les forces sont de même direction, de même intensité mais de sens opposés.*

fig 24



Valeurs de actions mécaniques (forces) :

$\vec{FA}_{1/4}$ = *580 daN*

$\vec{FB}_{2/3}$ = *580 daN*

CORRIGE

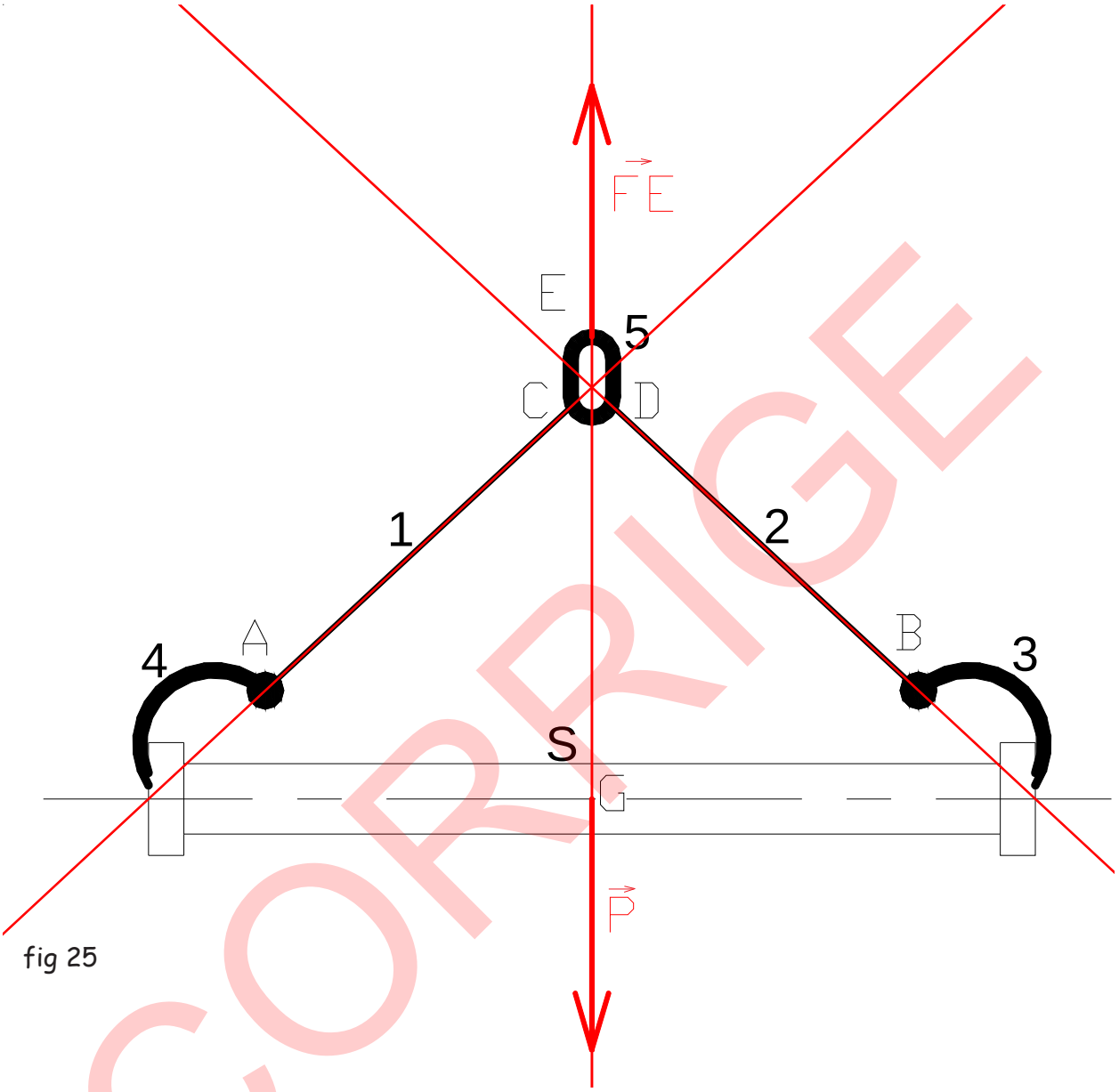


fig 25

CORRIGE

Conclusions : ....*L'ensemble est en équilibre donc $\vec{FE}$ et $\vec{P}$ ont même direction, même intensité mais de sens opposés - Plus les élingues sont inclinées plus des efforts sont créés - chaque élingues reprend plus de la moitié de $\vec{P}$*.....

Exercice d'application: Potence 1

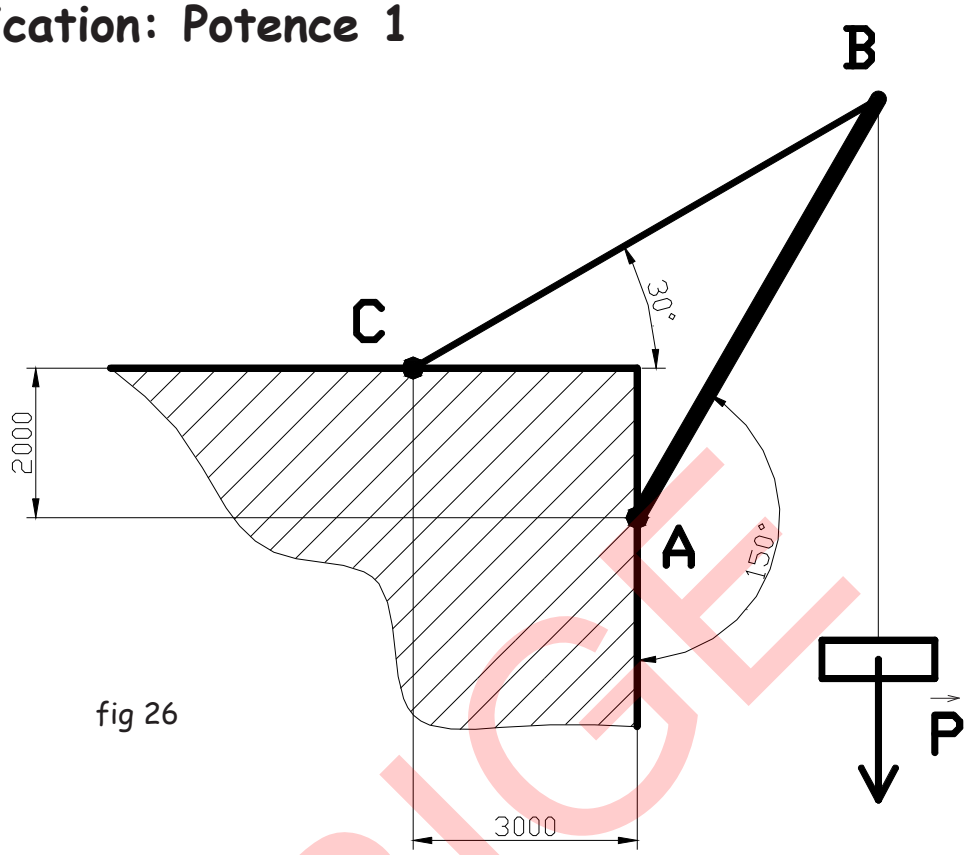


fig 26

La charge $\vec{P}$ de 2000 daN est suspendue par un cable (passant par le point B) à un bras [AB]

Ce bras est soutenu par un tirant [CB]

Le tout est accroché sur un quai en béton par des articulations C et A

Le point B peut être considéré comme une articulation

Les poids des différents éléments seront négligés.

Travail demandé :

a) L'ensemble triangulé A,B et C est-il un système isostatique ?

b) Isoler le tirant CB; faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent.

C) Isoler le bras AB; faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent. Tracer le dynamique des forces avec une échelle 10 mm pour 250 daN.

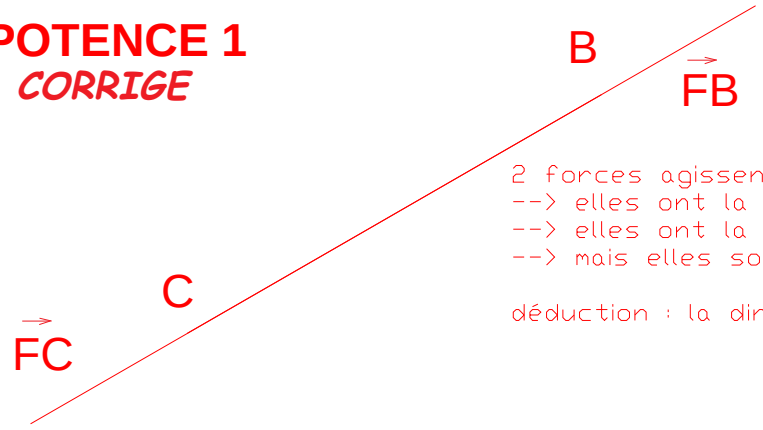
Résultats :

Voir corrigé page 27

Corrigé réalisé avec un logiciel de DAO

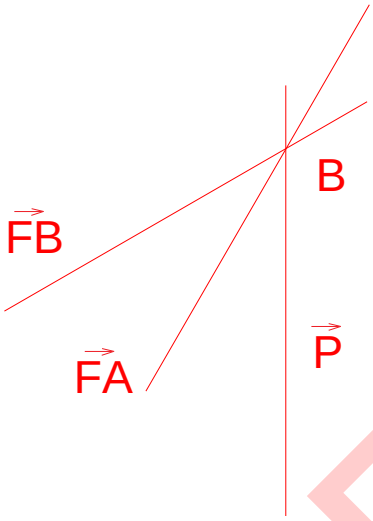
CORRIGE

POTENCE 1
CORRIGE



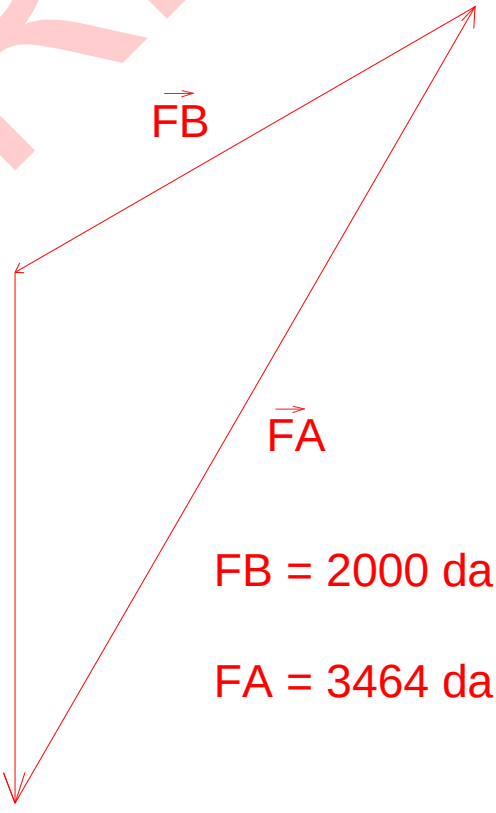
2 forces agissent sur un solide en équilibre
--> elles ont la même direction
--> elles ont la même intensité
--> mais elles sont de sens opposées

déduction : la direction est le support CB



3 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> il y a un point de concourance
--> le dynamique est fermé

déduction : Valeur des forces FA et FB



échelle : 35 mm pour 1000 daN

FB = 2000 daN

FA = 3464 daN

CORRIGE

Exercice d'application: Potence 2

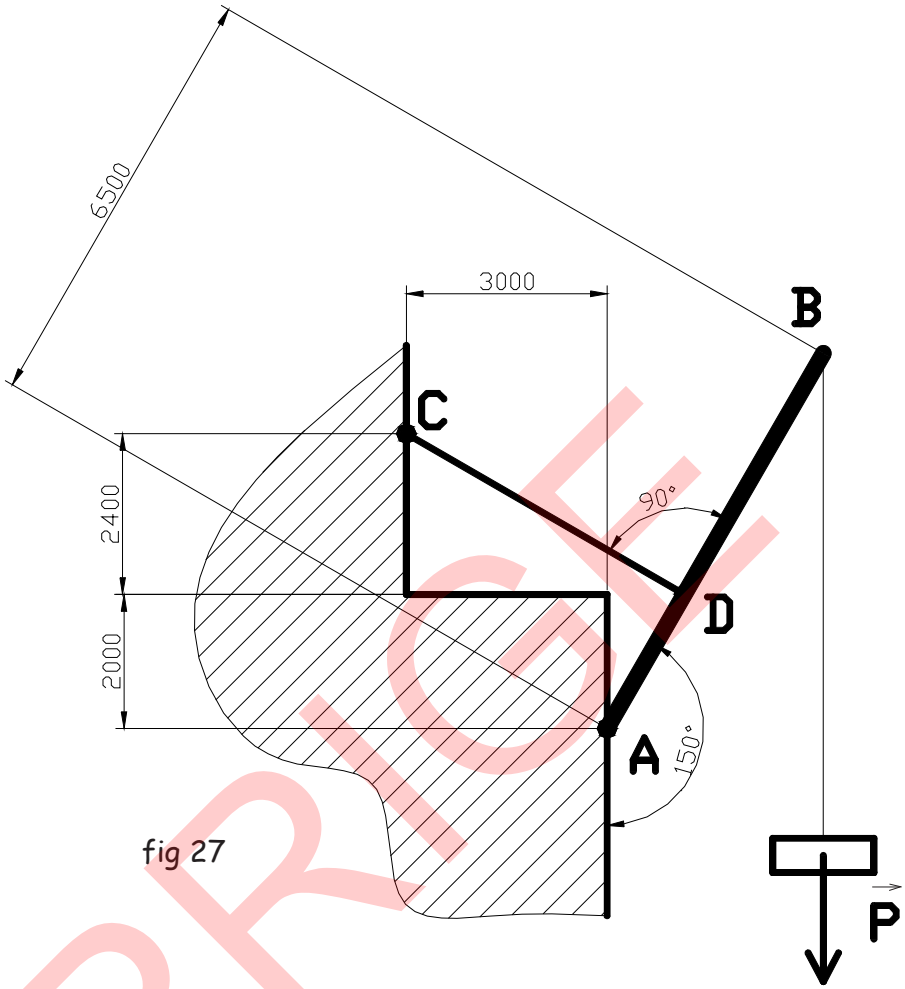


fig 27

La charge $\vec{P}$ de 2000 daN est suspendue par un cable (passant par le point B) à un bras [AB]

Ce bras est soutenu par un tirant [CD] perpendiculaire au bras [AB]

Le tout est accroché sur un quai en béton par des articulations C et A

Le point D peut être considéré comme une articulation

Les poids des différents éléments seront négligés.

Travail demandé :

a) L'ensemble AB et CD est-il un système isostatique ?

b) Isoler le tirant CD; faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent.

C) Isoler le bras AB; faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent. Tracer le dynamique des forces avec une échelle 10 mm pour 250 daN.

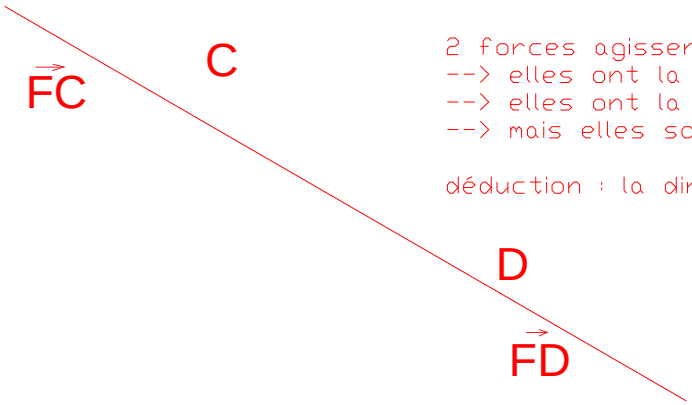
Résultats :

Voir corrigé page 29

Corrigé réalisé avec un logiciel de DAO

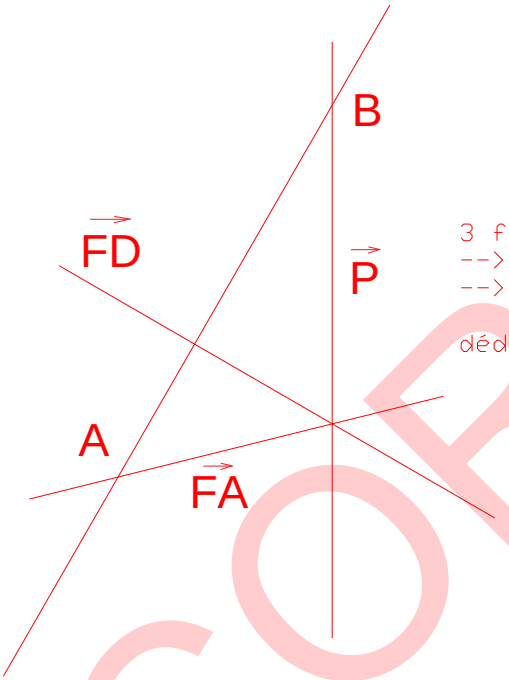
CORRIGE

POTENCE 2
CORRIGE



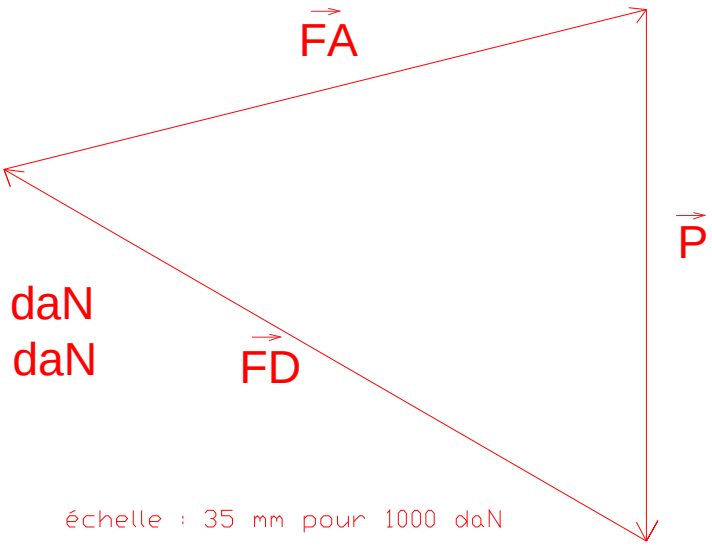
2 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> elles ont la même direction
--> elles ont la même intensité
--> mais elles sont de sens opposées

déduction : la direction est le support CD



3 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> il y a un point de concourance
--> le dynamique est fermé

déduction : Valeur des forces FA et FD



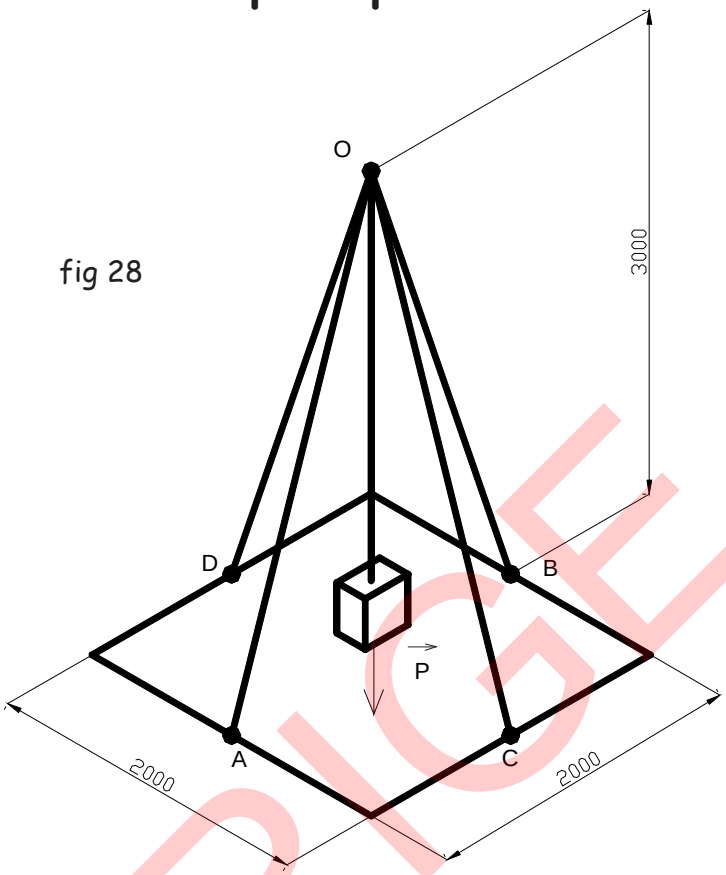
FA = 2497 daN
FD = 2799 daN

échelle : 35 mm pour 1000 daN

CORRIGE

Exercice d'application: Chêvre pour puits

fig 28



La charge $\vec{P}$ de 5000 daN est suspendue par un cable accroché à une poulie

La poulie passe par le point O.

Quatre bras identiques assurent l'équilibre de l'ensemble.

Les points A, B, C et D peuvent être considérés comme des articulations

Les poids des différents éléments seront négligés.

Travail demandé :

a) L'ensemble est-il un système isostatique ?

b) Quelle solution pratique pouvez choisir afin de travailler avec un système isostatique

b) Isoler les bras AO et BO; faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent.

C) Isoler le sous ensemble AOB; faire le bilan des actions mécaniques qui s'y exercent. Tracer le dynamique des forces avec une échelle 10 mm pour 250 daN.

Résultats :

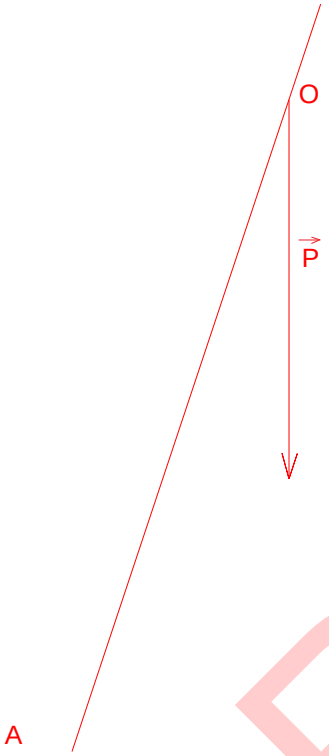
Voir corrigé pages 31 et 32

Corrigé réalisé avec un logiciel de DAO

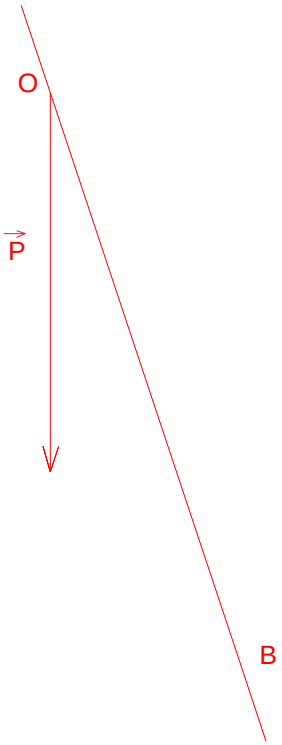
CORRIGE

CORRIGE CHEVRE POUR PUITS (feuille 1/2)

IL FAUT TRAVAILLER SUR UN DES PLAN
CHOISIR PAR EXEMPLE LE PLAN (AOB)
IL FAUT DIVISER L'INTENSITE DE P PAR 2 SOIT 2 500 DaN

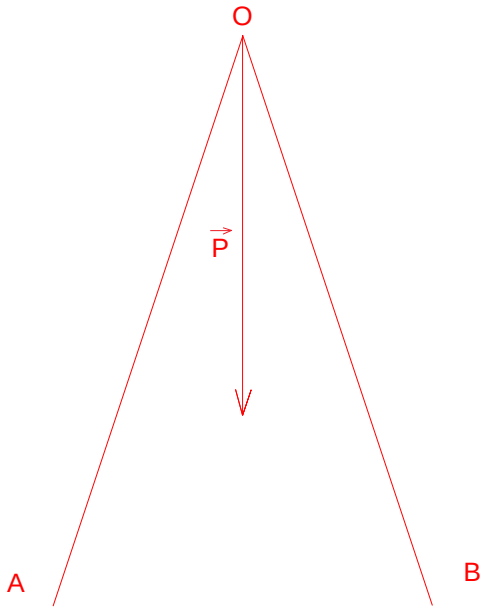


3 forces agissent sur la barre A□
$\vec{P}$, $\vec{FA}$, $\vec{F□}$
Pour que le solide soit en équilibre il faut que les 3 forces soient concourantes et que le dynamique soit fermé.
$\vec{P}$ et $\vec{F□}$ passe par le point □ donc le point □ est le point de concourance
En déduire la direction de $\vec{FA}$ qui passe aussi par le point □



3 forces agissent sur la barre B□
$\vec{P}$, $\vec{FB}$, $\vec{F□}$
Pour que le solide soit en équilibre il faut que les 3 forces soient concourantes et que le dynamique soit fermé.
$\vec{P}$ et $\vec{F□}$ passe par le point □ donc le point □ est le point de concourance
En déduire la direction de $\vec{FB}$ qui passe aussi par le point □

CORRIGE



3 forces agissent sur l'ensemble A□B
$\vec{P}$, $\vec{FB}$, $\vec{FA}$
Pour que le solide soit en équilibre il faut que les 3 forces soient concourantes et que le dynamique soit fermé.
□n connait le point de concourance, c'est le point □
□n connait les directions de $\vec{FB}$ et $\vec{FA}$
□n peut tracer le dynamique des forces

Echelle : 10 mm pour 250 DaN

FA = FB = 1 317.5 daN

CORRIGE

Exercice d'application : Dispositif de levage

1 - DISPOSITIF DE LEVAGE

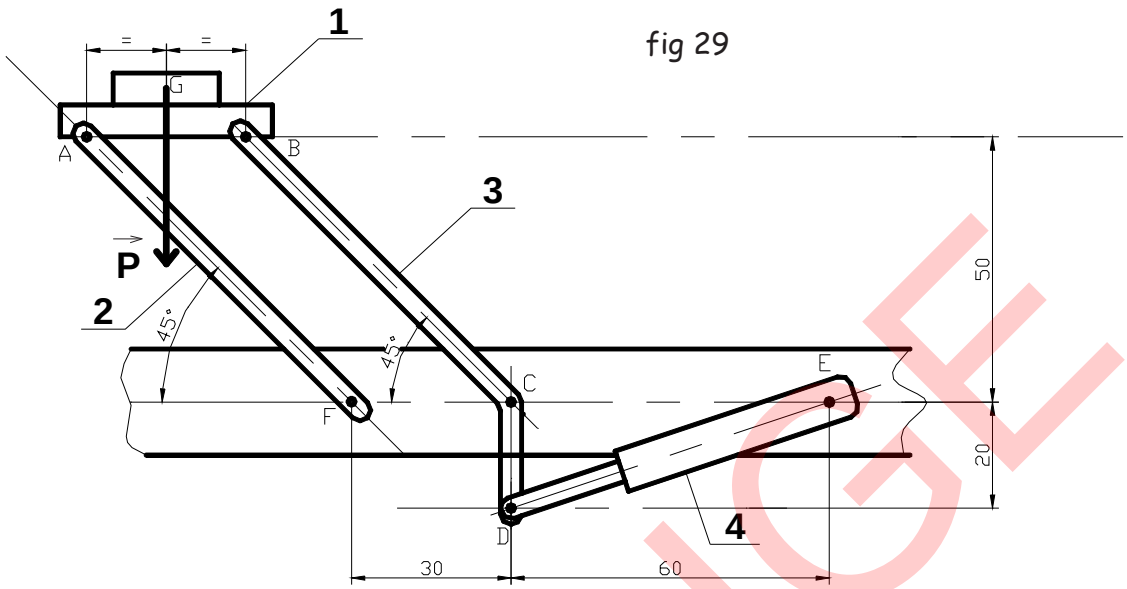


fig 29

Le plateau **1** est supporté par le bras **2** et le levier coudé **3**.
Par l'action du vérin **4** le plateau peut être soulevé ou descendu.

La charge $\vec{P}$ de 500 daN est placé comme l'indique la figure.

A, B, C, D, E et F sont des articulations.

F, C, E, sont solidaires d'un bâti fixe.

Travail demandé :

a) Etudier l'équilibre du plateau.

b) Quelle doit être la poussée du vérin pour maintenir la charge $\vec{P}$ en place

c) Le bras coudé **3** est t'il bien conçu ?

Les recherches se feront par la méthode graphique sur un calque :

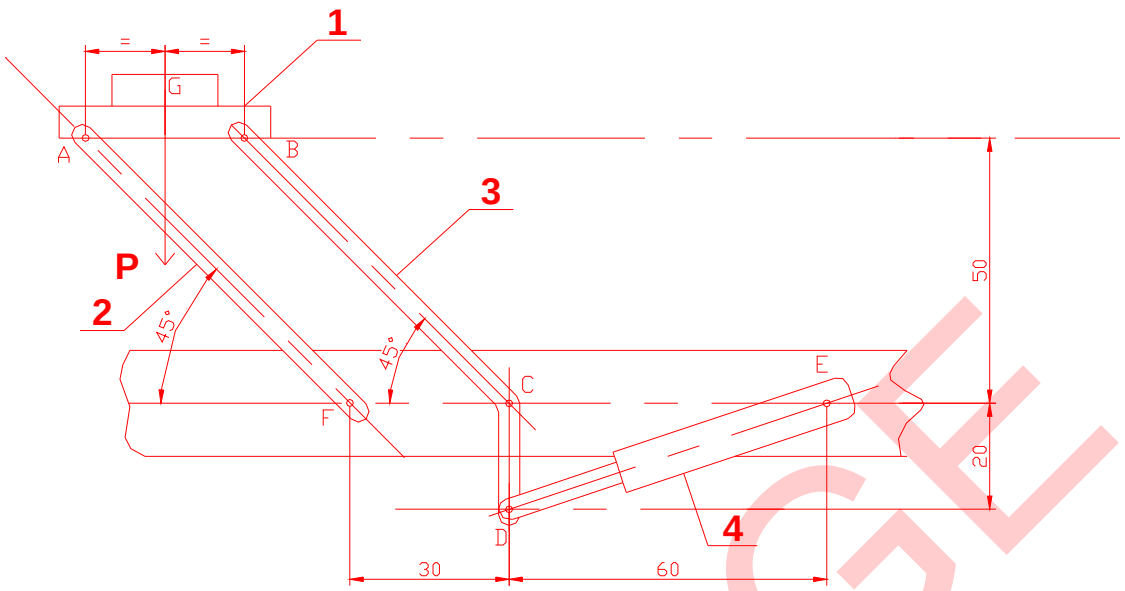
a) Isoler les solides un par un

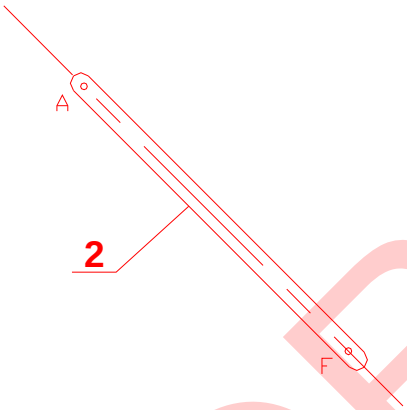
b) Chaque solide doit être en équilibre
- directions concourantes
- dynamiques des forces fermés

Conclusions :.....*Voir corrigé pages 34 et 35*
Corrigé réalisé avec un logiciel de DAO
Le bras 3 est mal conçu - il faudrait que la longueur CD soit supérieure à la longueur BC
.....

CORRIGE

DISPOSITIF DE LEVAGE

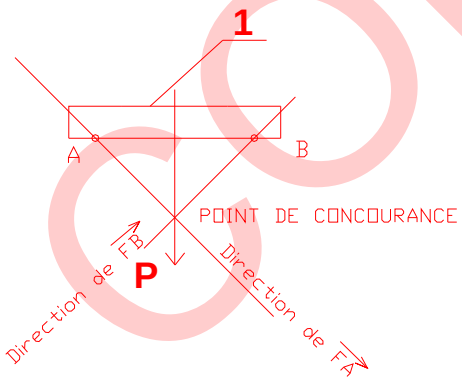




1 - SOLIDE 2

2 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> elles ont la même direction
--> elles ont la même intensité
--> mais elles sont de sens opposées

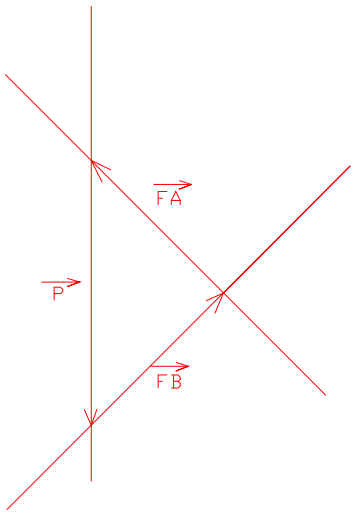
déduction : la direction est le support AF



2 - SOLIDE 1

3 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> il y a un point de concourance
--> le dynamique est fermé

déduction : Valeur des forces $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FB}$

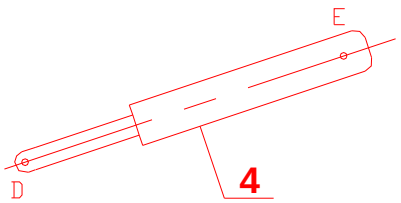


échelle : 10 mm pour 100 DaN

FA = 353.55 DaN
FB = 353.55 DaN

CORRIGE

DISPOSITIF DE LEVAGE



3 - SOLIDE 4

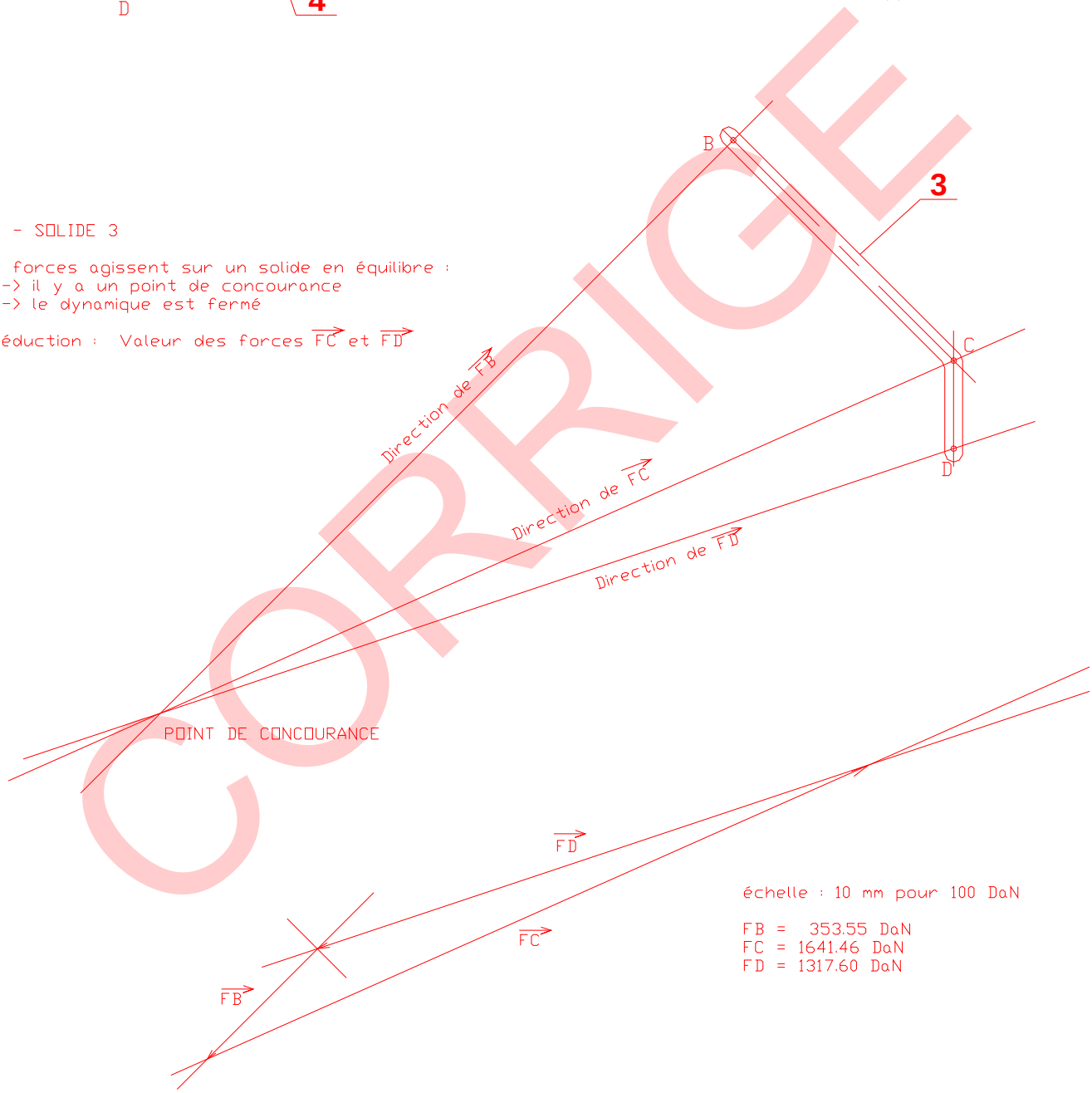
2 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> elles ont la même direction
--> elles ont la même intensité
--> mais elles sont de sens opposées

déduction : la direction est le support DE

4 - SOLIDE 3

3 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> il y a un point de concourance
--> le dynamique est fermé

déduction : Valeur des forces $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FD}$



échelle : 10 mm pour 100 DaN

FB = 353.55 DaN
FC = 1641.46 DaN
FD = 1317.60 DaN

CORRIGE

Exercice d'application : Pince multiprise

La pince multiprise de la figure 1 se compose de deux manche articulés au point C. L'articulation C (liaison pivot) est réglable ce qui permet de faire varier l'écartement AB des machoires. L'axe 4 est solidaire du manche 1.

L'ensemble est en équilibre dans la position de la figure 1. L'action exercée par la main est schématisée par les deux forces $\vec{F}$ de 10 DaN appliquées en D et E. Les actions en A, B et C seront schématisées par des vecteurs forces (A, B et C sont les points d'application). Les poids des pièces 1, 2 et 3 sont négligés. Les frottements sont négligés.

Afin de déterminer le rapport de multiplication d'effort de la pièce on demande sur un calque A3V:

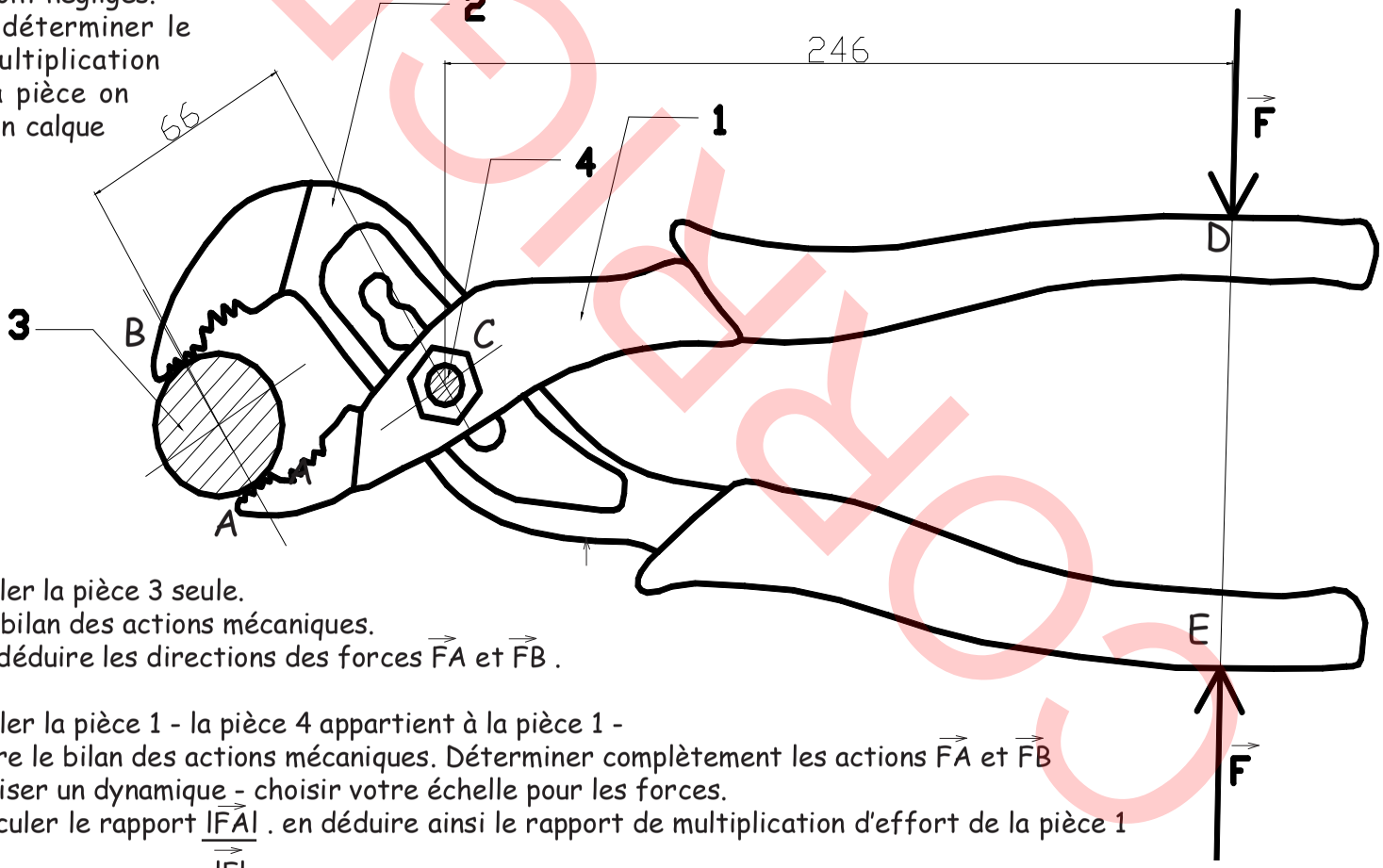


Figure1

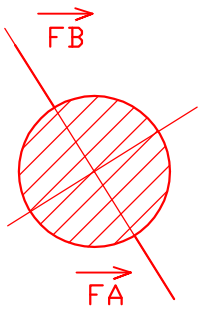
échelle 1:2

1 - Isoler la pièce 3 seule.
Faire le bilan des actions mécaniques.
En déduire les directions des forces $\vec{FA}$ et $\vec{FB}$.

2 - Isoler la pièce 1 - la pièce 4 appartient à la pièce 1 -
Faire le bilan des actions mécaniques. Déterminer complètement les actions $\vec{FA}$ et $\vec{FB}$
utiliser un dynamique - choisir votre échelle pour les forces.
Calculer le rapport $\frac{|\vec{FA}|}{|\vec{F}|}$. en déduire ainsi le rapport de multiplication d'effort de la pièce 1

COPYRIGHT

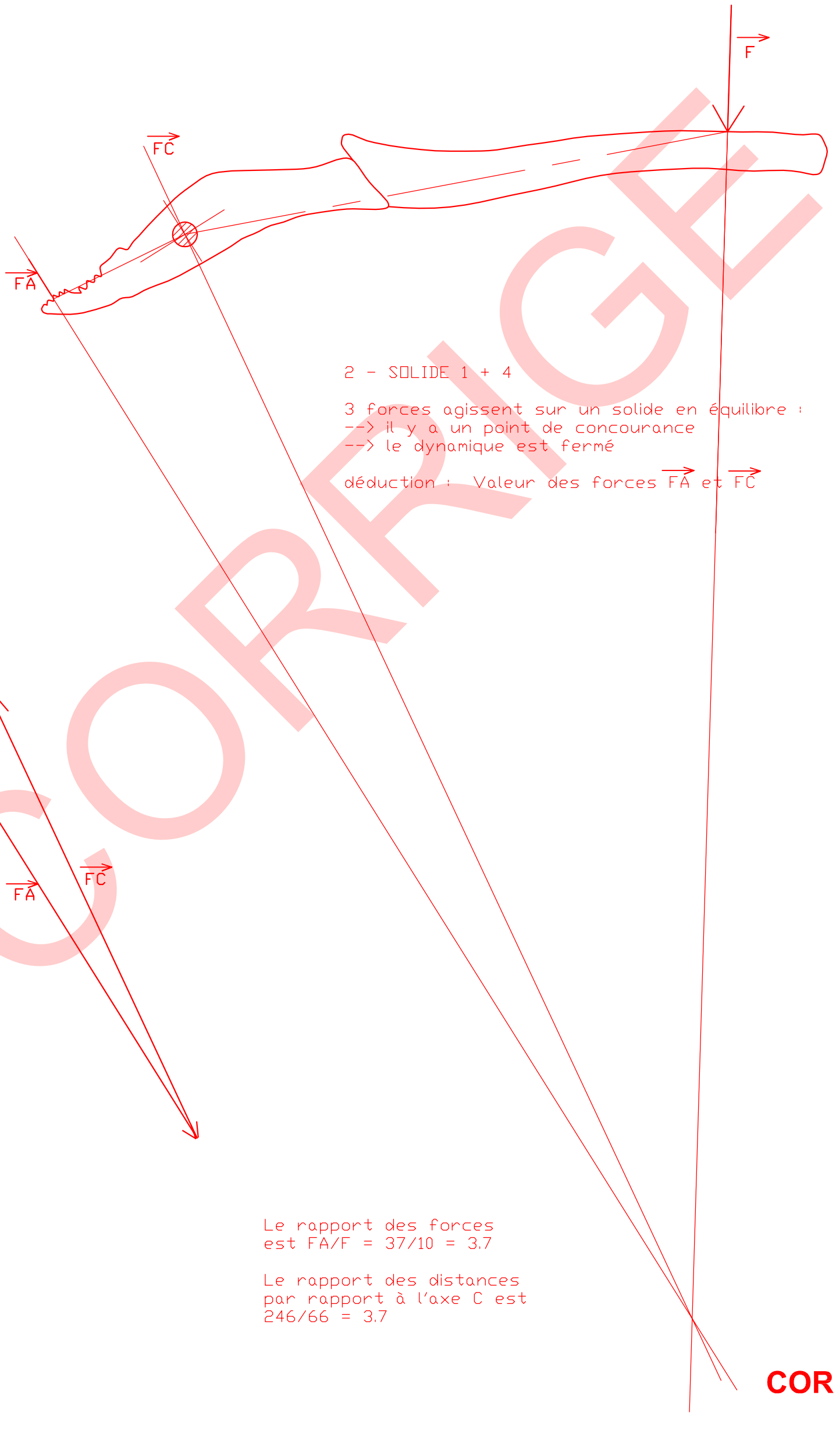
PINCE MULTIPLE



1 - SOLIDE 3

2 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> elles ont la même direction
--> elles ont la même intensité
--> mais elles sont de sens opposées

déduction : la direction est le support AB

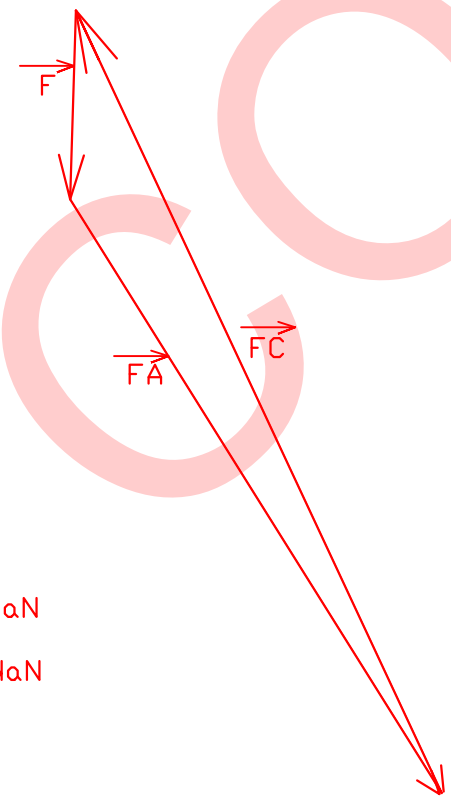


2 - SOLIDE 1 + 4

3 forces agissent sur un solide en équilibre :
--> il y a un point de concourance
--> le dynamique est fermé

déduction : Valeur des forces $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FC}$

échelle des forces :
10 daN = 25 mm



FA = 37.0 daN

FC = 45.7 daN

Le rapport des forces
est FA/F = 37/10 = 3.7

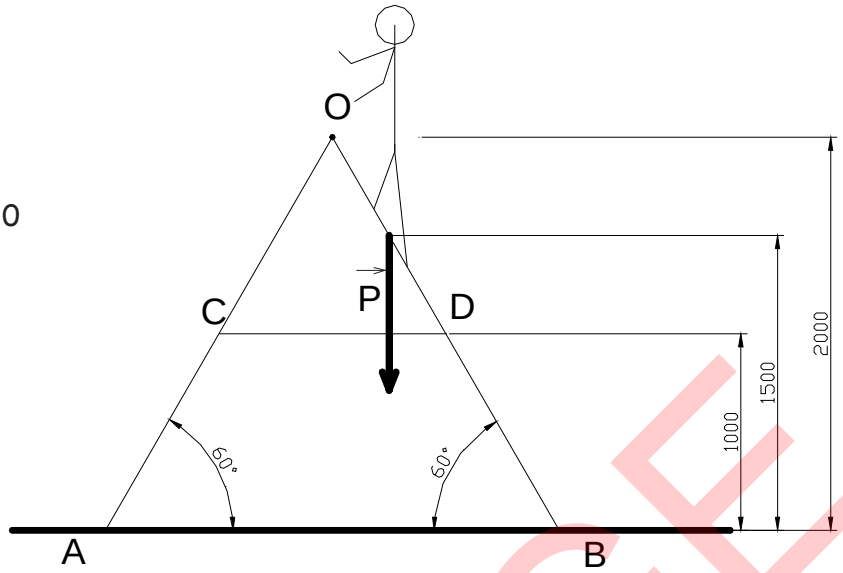
Le rapport des distances
par rapport à l'axe C est
246/66 = 3.7

CORRIGE

CORRIGE 1/1

Exercice de contrôle: Echelle double

fig 30



Un homme de 90 daN portant une charge de 60 daN monte sur une échelle double de 2000 mm maintenue par un tirant CD à mi-hauteur et s'arrête à une hauteur de 1500 mm.

le système étant en équilibre déterminer les forces de réaction en A et B.

Les points O, C et D sont considérés comme des articulations; les points A et B sont considérés comme des appuis simples.

Méthode :

1 - Le système est il isostatique ?

2 - Isoler le tirant CD en déduire la direction des forces $\vec{Fc}$ et $\vec{Fd}$; (échelle 1000 mm pour 37.5 mm)

3 - Isoler le montant OB, en déduire le point de concourance puis les directions des forces $\vec{Fb}$ et $\vec{Fo}$; (échelle 1000 mm pour 37.5 mm)

4 - Isoler le montant OA et en déduire la direction de la force $\vec{Fa}$ (utiliser les données précédentes); (échelle 1000 mm pour 37.5 mm)

5 - Isoler l'ensemble AOB (les forces $\vec{Fo}$, $\vec{Fc}$ et $\vec{Fd}$ deviennent des forces intérieures); (échelle 1000 mm pour 37.5 mm)

Tracer le dynamique des forces (échelle 1:2) pour le système AOB; en déduire la valeur de $\vec{Fa}$ et $\vec{Fb}$.

6 - Tracer le dynamique des forces (échelle 1:2) pour le système OA; en déduire la valeur de $\vec{Fc}$ et $\vec{Fo}$.

7 - Tracer le dynamique des forces (échelle 1:2) pour le système OB (normalement il n'y a plus d'inconnue) et contrôler que le dynamique est fermé.

8 - Conclusion.

CORRIGE

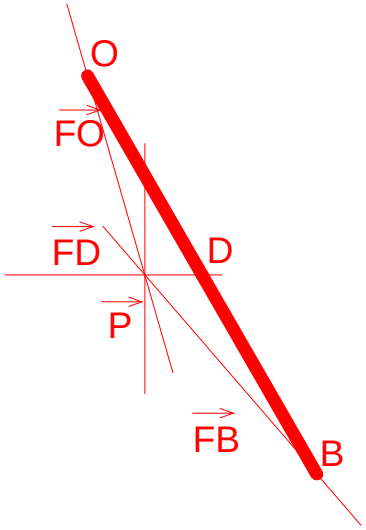
Le système est mécanique de degré 1 :

3 solides = 9 degrés de liberté
3 articulations + 2 appuis simples = 8 degrés de liberté

isoler la barre CD

2 forces, ce qui implique la direction de $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FC}$

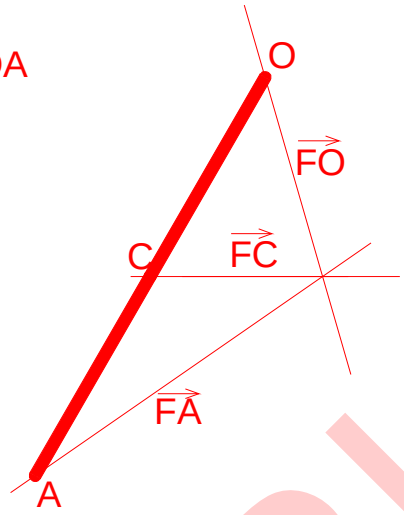
isoler la barre OB



Directions de $\overrightarrow{FD}$ connue, et de $\overrightarrow{P}$ connue donc le point de concourance est trouvé
Ce qui implique les directions de $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{FO}$

CORRIGE

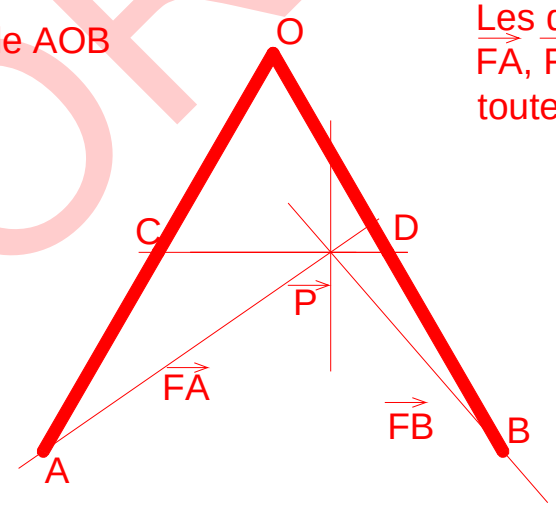
isoler la barre OA



Direction de $\overrightarrow{FO}$ connue
Direction de $\overrightarrow{FC}$ connue

Un point de concourance qui implique la direction de $\overrightarrow{FA}$

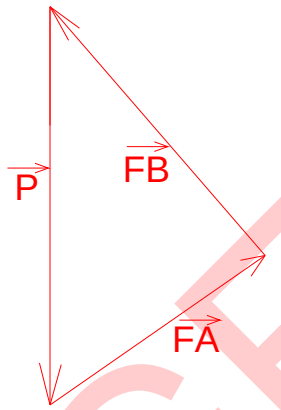
isoler l'ensemble AOB



Les directions de $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{P}$ sont toutes connues

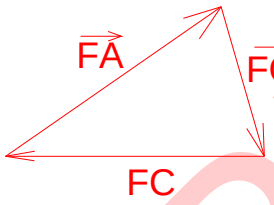
CORRIGE

dynamique des forces pour AOB



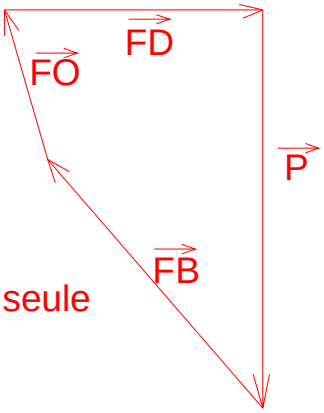
FA = 98.78 daN
FB = 124.02 daN

dynamique des forces pour OA seule



FC= 97.42 daN
FO = 58.54 daN

dynamique des forces pour OB seule



Le dynamique des forces pour OB seule est fermé

CORRIGE

Exercice de contrôle: Echelle double

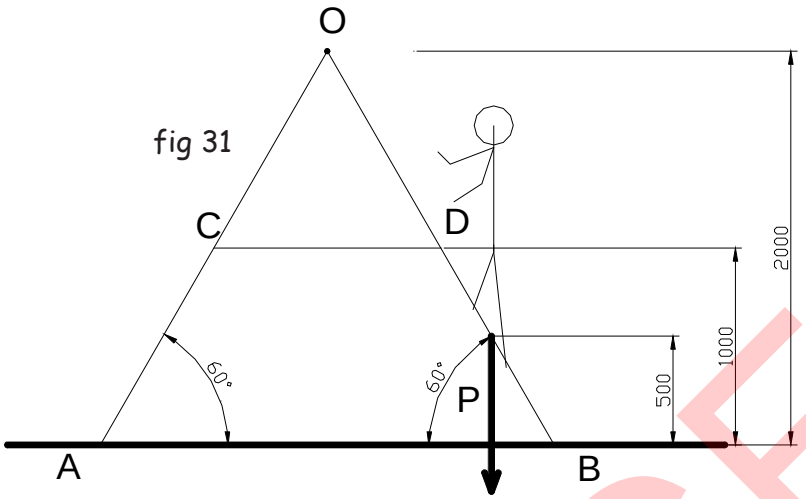


fig 31

Un homme de 90 daN portant une charge de 60 daN monte sur une échelle double de 2000 mm maintenue par un tirant CD à mi-hauteur et s'arrête à une hauteur de 500 mm.

le système étant en équilibre déterminer les forces de réaction en A et B.

Les points O, C et D sont considérés comme des articulations; les points A et B sont considérés comme des appuis simples.

Méthode :

1 - Le système est il isostatique ?

2 - Isoler le tirant CD en déduire la direction des forces $\vec{Fc}$ et $\vec{Fd}$; (échelle 1000 mm pour 37.5 mm)

3 - Isoler le montant OB, en déduire le point de concourance puis les directions des forces $\vec{Fb}$ et Fo; (échelle 1000 mm pour 37.5 mm)

4 - Isoler le montant OA et en déduire la direction de la force $\vec{Fa}$ (utiliser les données précédentes); (échelle 1000 mm pour 37.5 mm)

5 - Isoler l'ensemble AOB (les forces $\vec{Fo}$, $\vec{Fc}$ et $\vec{Fd}$ deviennent des forces intérieures); (échelle 1000 mm pour 37.5 mm)

Tracer le dynamique des forces (échelle 1:2) pour le système AOB; en déduire la valeur de $\vec{Fa}$ et $\vec{Fb}$.

6 - Tracer le dynamique des forces (échelle 1:2) pour le système OA; en déduire la valeur de $\vec{Fc}$ et $\vec{Fo}$.

7 - Tracer le dynamique des forces (échelle 1:2) pour le système OB (normalement il n'y a plus d'inconnue) et contrôler que le dynamique est fermé.

8 - Conclusion.

CORRIGE

ECHELLE DOUBLE - CAS N°2 (feuille 1/3)

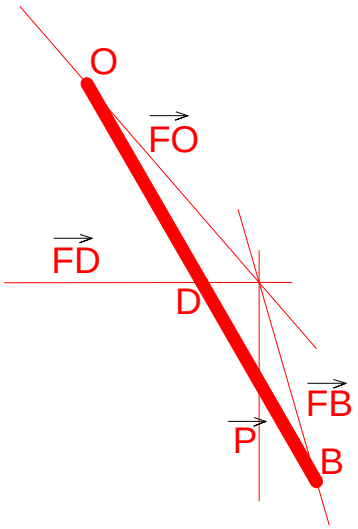
Le système est mécanique de degré 1 :

3 solides = 9 degrés de liberté
3 articulations + 2 appuis simples = 8 degrés de liberté

isoler la barre CD

2 forces, ce qui implique la direction de $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FC}$

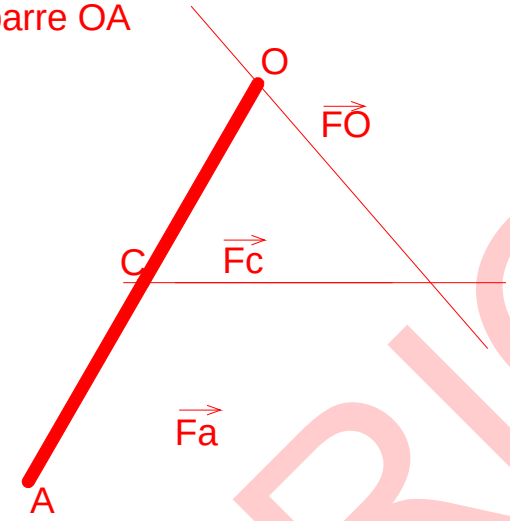
isoler la barre OB



Directions de $\overrightarrow{FD}$ connue, et de $\overrightarrow{P}$ connue donc le point de concourance est trouvé
Ce qui implique les directions de $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{FO}$

CORRIGE

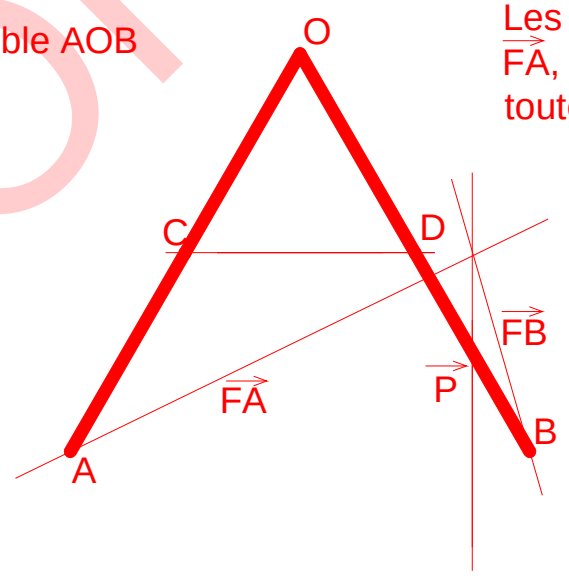
isoler la barre OA



Direction de $\overrightarrow{FO}$ connue
Direction de $\overrightarrow{FC}$ connue

Un point de concourance qui implique la direction de $\overrightarrow{FA}$

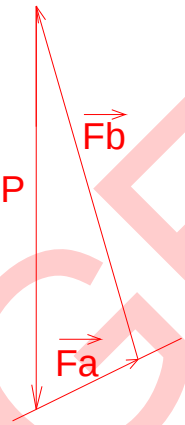
isoler l'ensemble AOB



Les directions de $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{P}$ sont toutes connues

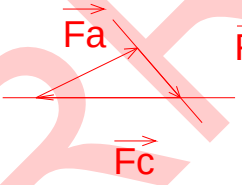
CORRIGE

dynamique des forces pour AOB



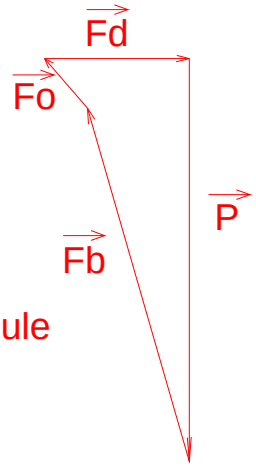
Fb = 136.9 daN
Fa = 42.2 daN

dynamique des forces pour OA seule



Fo = 24.44 daN
Fc = 53.93 daN

dynamique des forces pour OB seule



Le dynamique des forces pour OB seule est fermé

CORRIGE

Recherche des réactions d'appui d'une poutre

1) - Rappels : Résultantes de deux forces coplanes (voir page 18)

Tracer le dynamique des forces parallèles $\vec{F1}$ et $\vec{F4}$ de la fig 32 dans le cadre de la fig 33

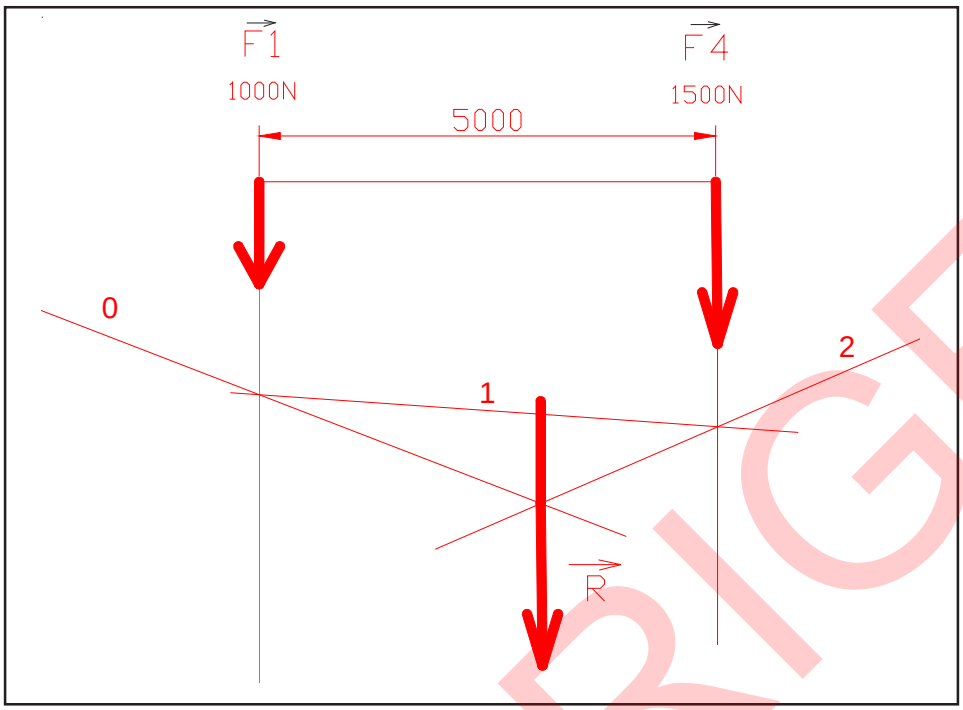


fig 32

Echelle des longueurs
12 mm / m

Déterminer la résultante des forces $\vec{R}$
Tracer le funiculaire sur la fig 33 et déterminer la position de cette résultante sur la fig 32

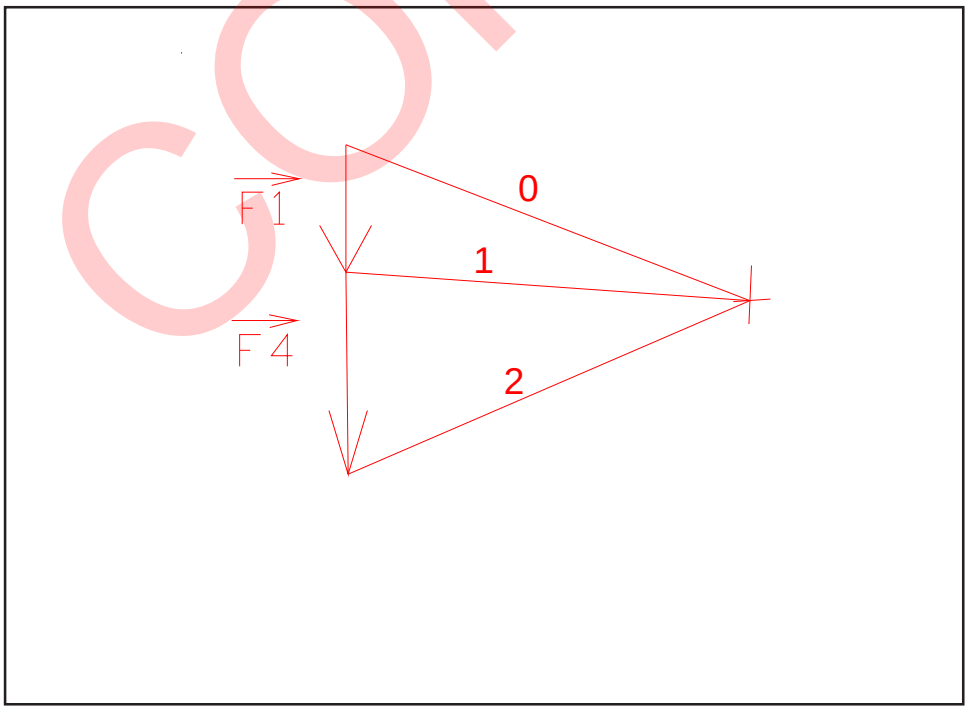


fig 33

Echelle des forces
0,012 mm / N

CORRIGE

2) - Problème

Soit une poutre posé sur deux appuis A et B avec une force $\vec{F}$ correspondant à une charge verticale. (voir fig 34)

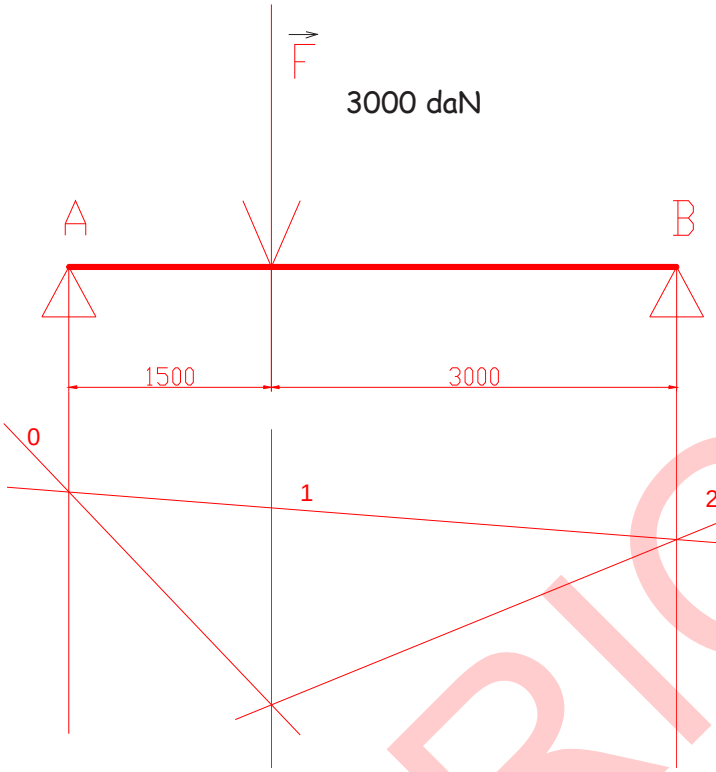


fig 34

Funiculaire

En s'inspirant de la méthode graphique expliquée page 18 et revue page 46 comment pourriez vous trouver les valeurs des réactions $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$

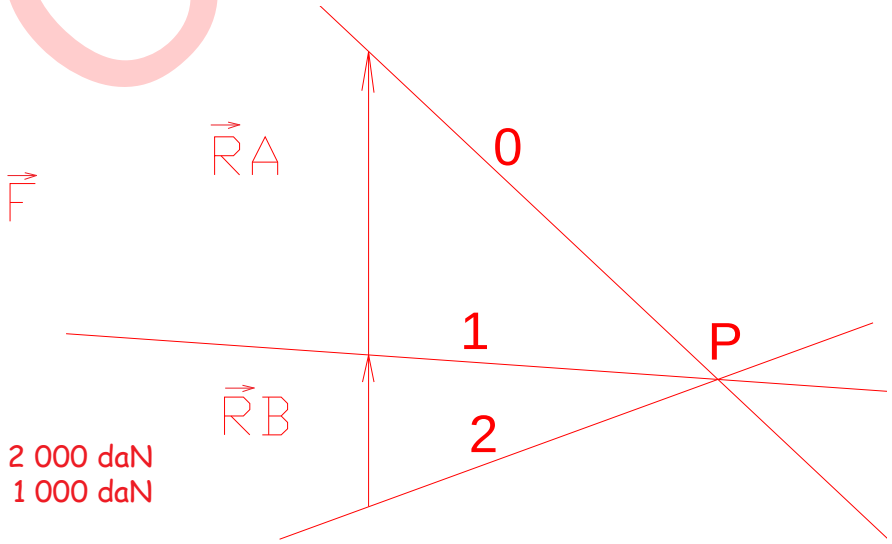
a) les forces sont *coplanes* et le système est en équilibre donc *$\vec{RA} + \vec{RB} + \vec{F} = \vec{0}$*

b) Les directions des forces $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$ sont *sont parallèles, mais les intensités sont différentes*

c) La résultante de $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$ est *de même direction, même intensité mais de sens opposé à $\vec{F}$*

d) *Tracer le funiculaire pour déterminer des rayons*

e) *Tracer le dynamique pour déterminer $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$*



Dynamique

1000 daN = 20 mm

RA = 2 000 daN
RB = 1 000 daN

CORRIGE

3) - Exercice d'application

Soit une poutre posé sur deux appuis A et B avec une force $\vec{F}$ correspondant à une charge verticale (voir fig 35) déterminer les forces de réaction $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$.

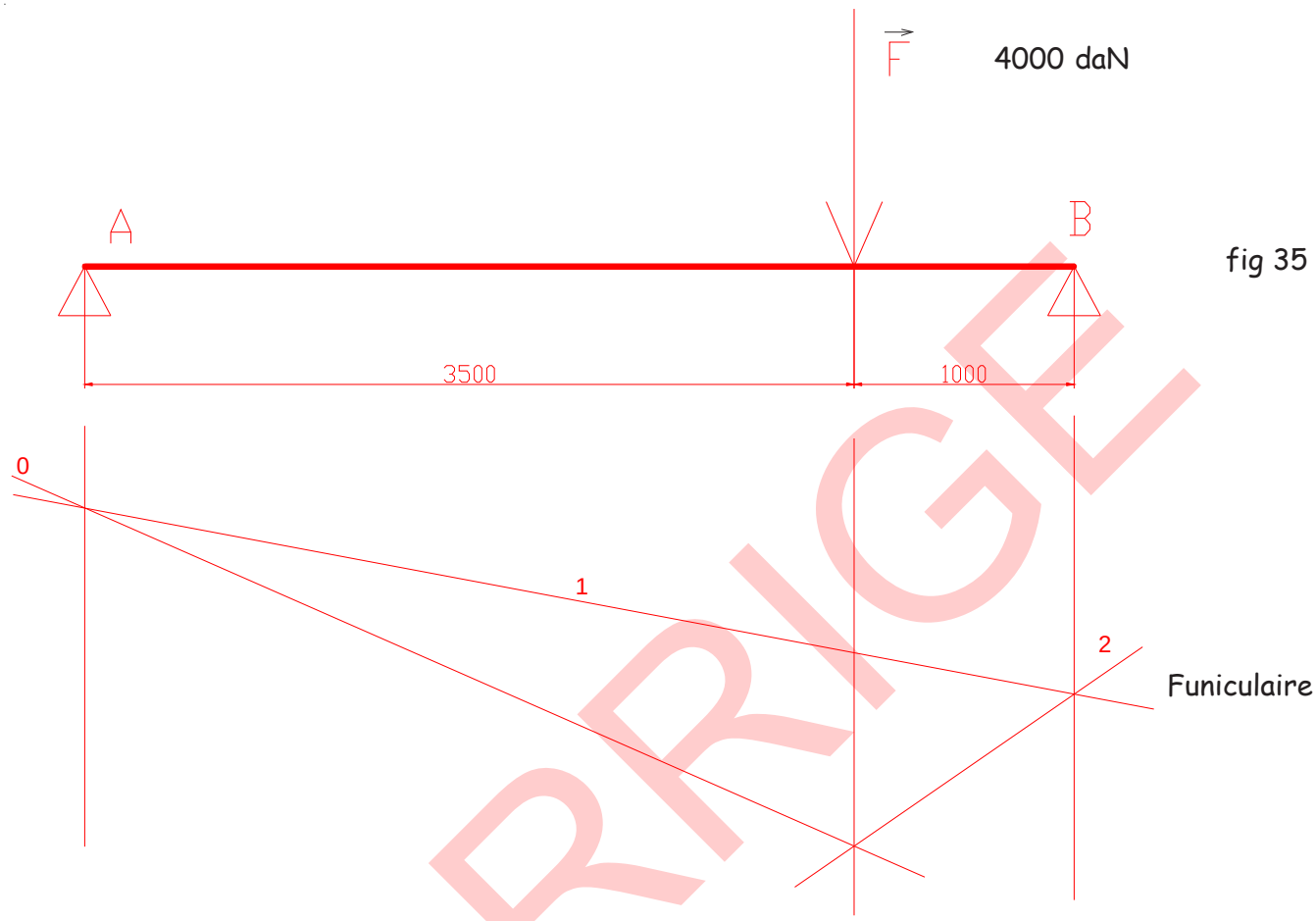
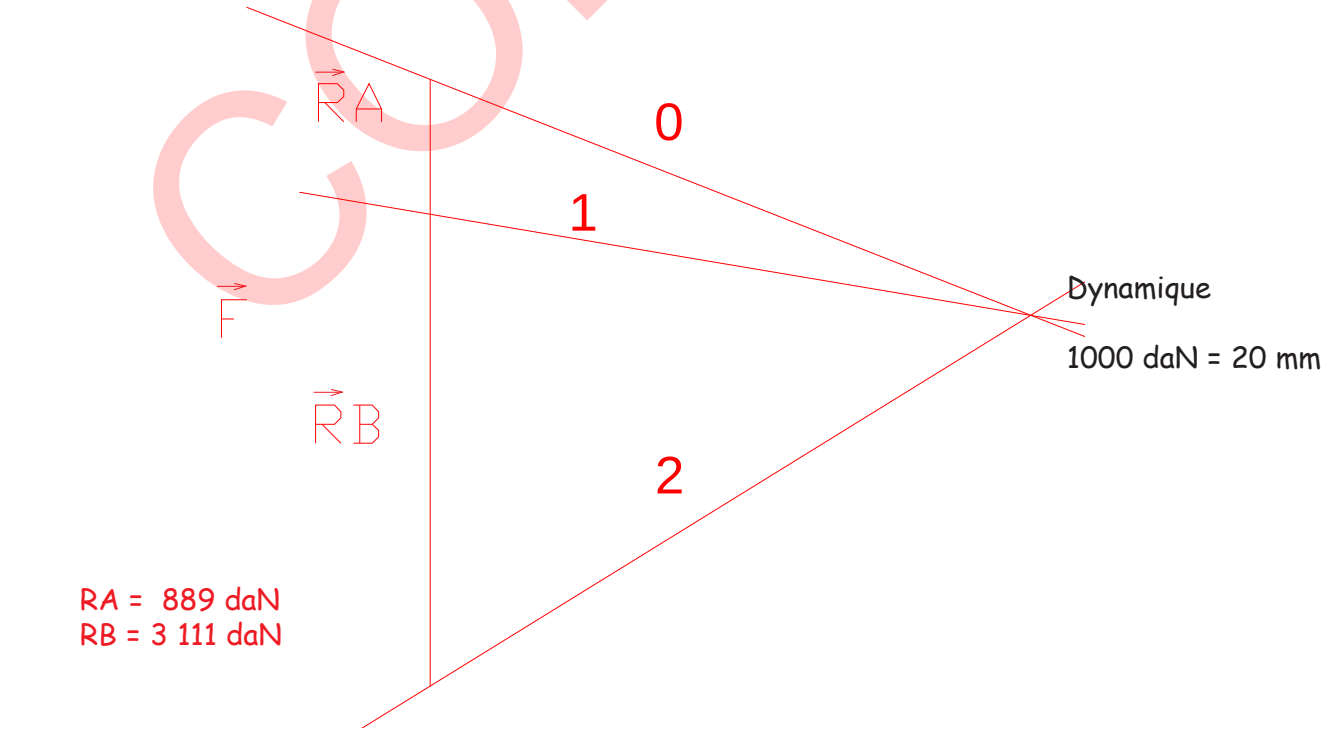


fig 35



RA = 889 daN
RB = 3 111 daN

CORRIGE

4) - Exercice d'application

Soit une poutre posé sur deux appuis A et B avec deux forces $\vec{F1}$ et $\vec{F2}$ correspondant à deux charges verticales (voir fig 36) déterminer les forces de réaction $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$.

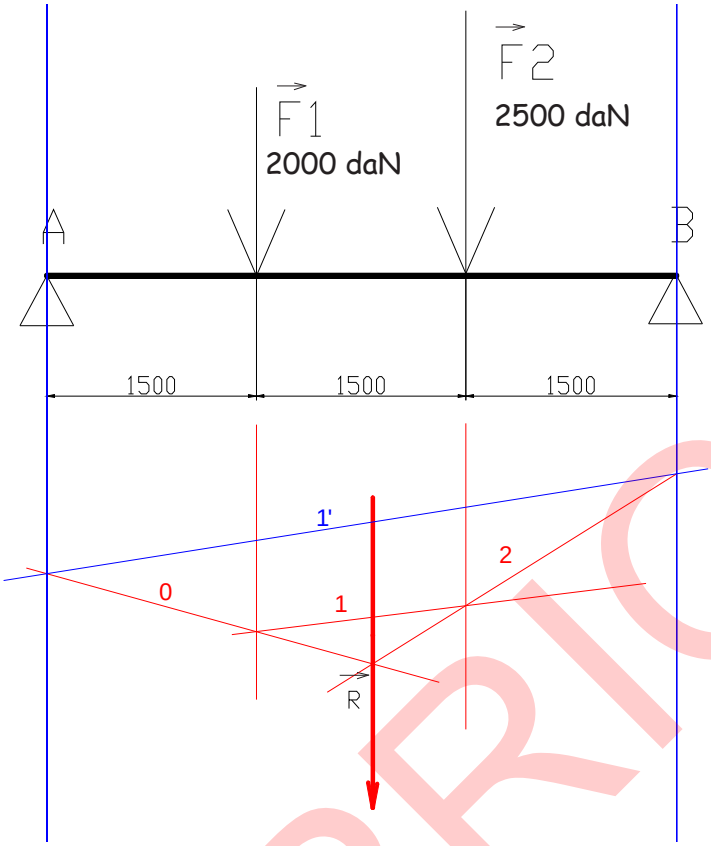
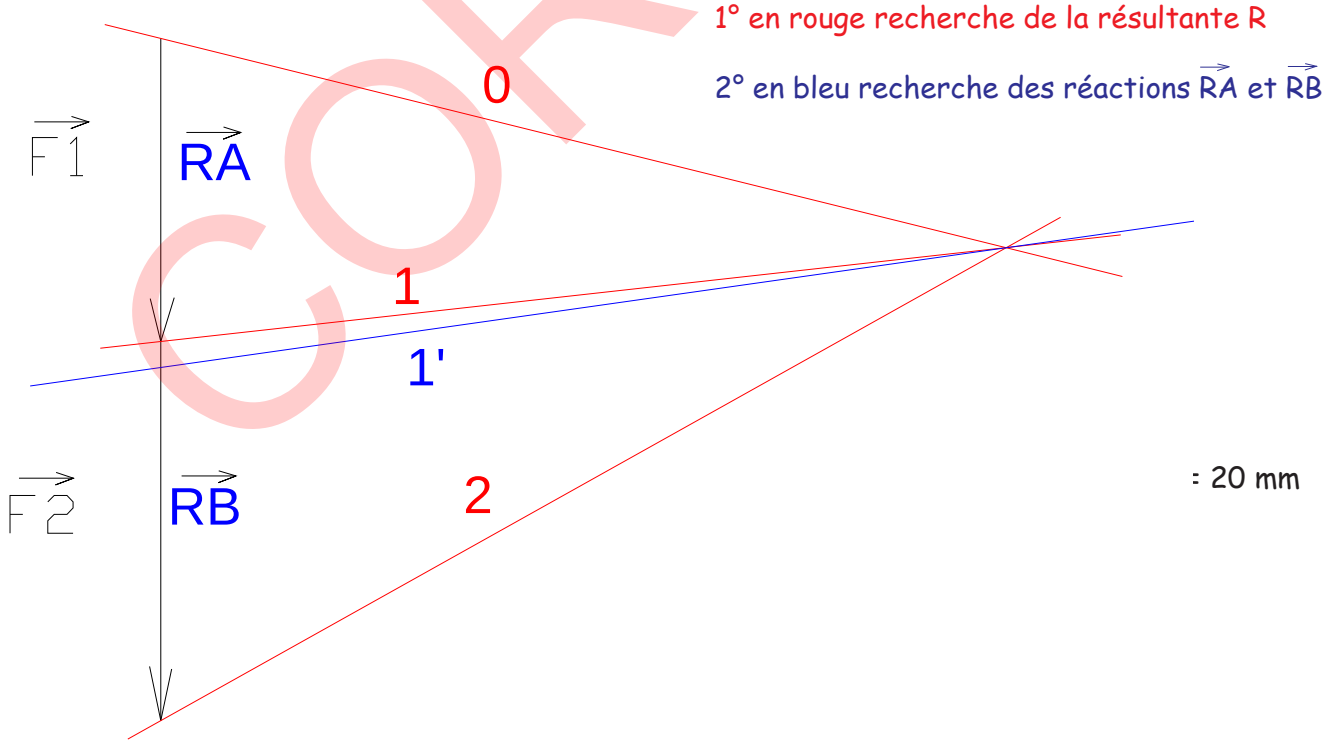


fig 36

Funiculaire



1° en rouge recherche de la résultante $\vec{R}$

2° en bleu recherche des réactions $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$

: 20 mm

RA = 2 171 daN
RB = 2 329 daN

CORRIGE

Méthode du crémona

But : Déterminer graphiquement les efforts dans les barres

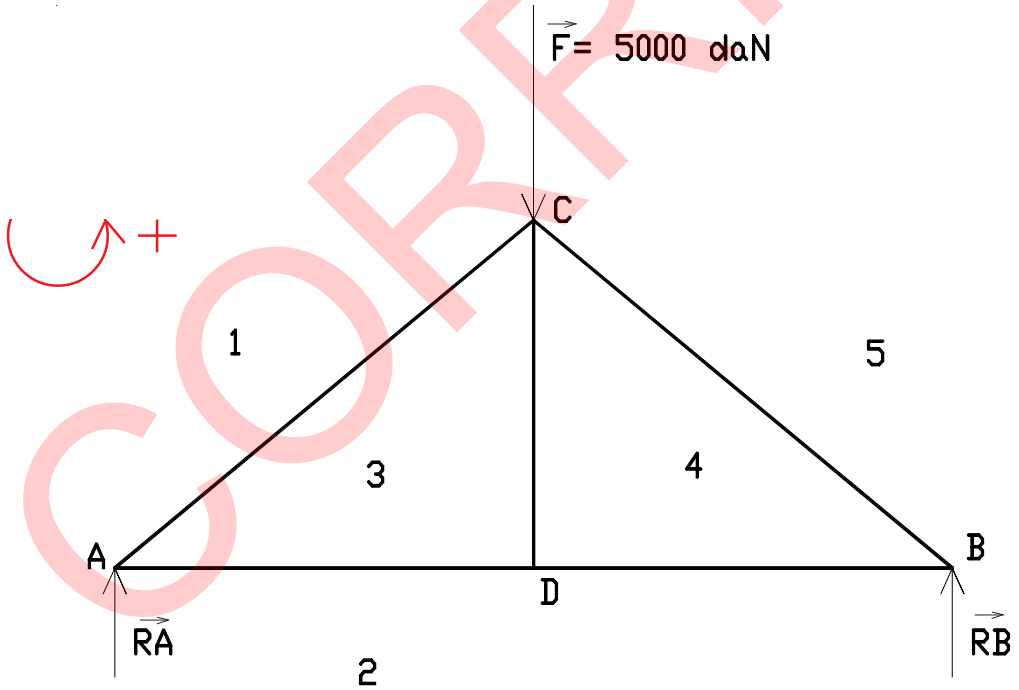
Principe : Les barres ne sont soumises qu'à des efforts de traction ou de compression dirigés selon l'axe des barres

Méthode : On étudie l'équilibre des différents noeuds du système en faisant le dynamique des forces qui s'y exercent.
On regroupe les différents dynamiques en une seule figure qui prend alors le nom de CREMONA

Ordre chronologique :

1 - Inventaire des forces extérieures (ici F, RA et RB)

2 - Valeurs des forces extérieures (ici F= 5 000 N, RA = 2 500N et RB = 2 500N)



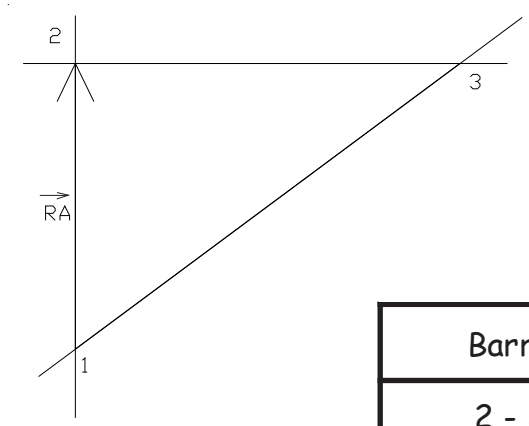
3 - Repérer les zones délimitées par une barre ou par une force

4 - Prendre toujours le même sens de rotation pour tracer le dynamique de chaque noeud

UN NOEUD NE PEUT ÊTRE RÉSOLU QUE SI IL Y A DEUX INCONNUES AU MAXIMUM

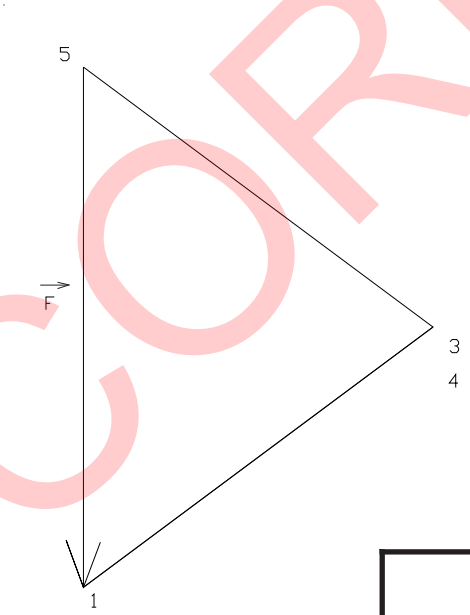
CORRIGE

5 - Noeud A = On commence par le noeud A car il y a deux inconnues
la barre 2-3 et la barre 3-1
Compléter le tableau - reporter le dynamique page 53



Barre	Valeur effort	Nature effort
2 - 3	3368	T
3 - 1	4194.5	C

6 - Noeud C = On peut continuer par le noeud C car il y a deux inconnues
la barre 3-4 et la barre 4-5
Compléter le tableau - reporter le dynamique page 53



Barre	Valeur effort	Nature effort
1 - 3	4194.5	C
4 - 5	4194.5	C
3 - 4	0	/

CORRIGE

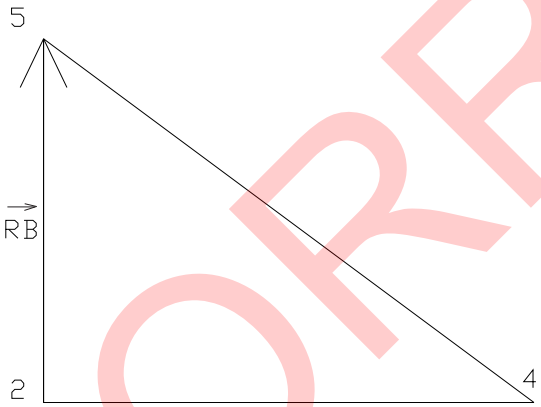
7 - Noeud D = Pourquoi ne pas continuer par le noeud D car il y a une inconnues la barre 2-4

Compléter le tableau - reporter le dynamique page 53

Barre	Valeur effort	Nature effort
3 - 2	3368	T
2 - 4	3368	T
4 - 3	0	/

8 - Noeud B = Il n'y a plus d'inconnue, mais vous aimez tellement ça !

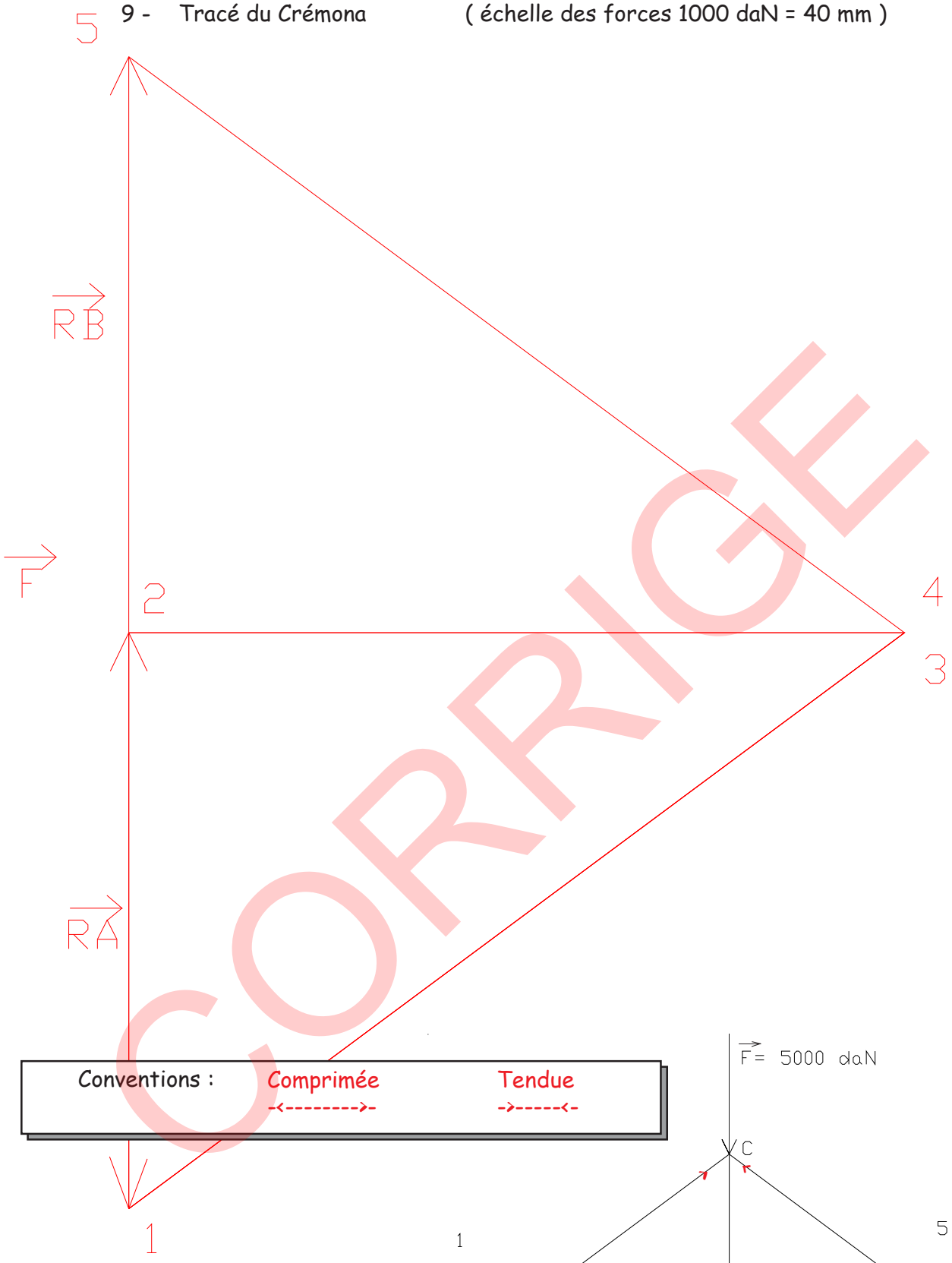
Compléter le tableau - reporter le dynamique page 53



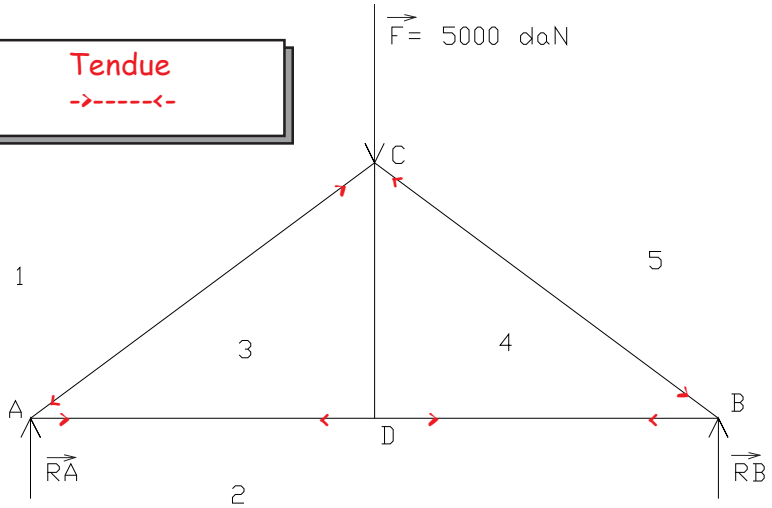
Barre	Valeur effort	Nature effort
4 - 2	3368	T
5 - 4	4194.5	C

CORRIGE

9 - Tracé du Crémona (échelle des forces 1000 daN = 40 mm)



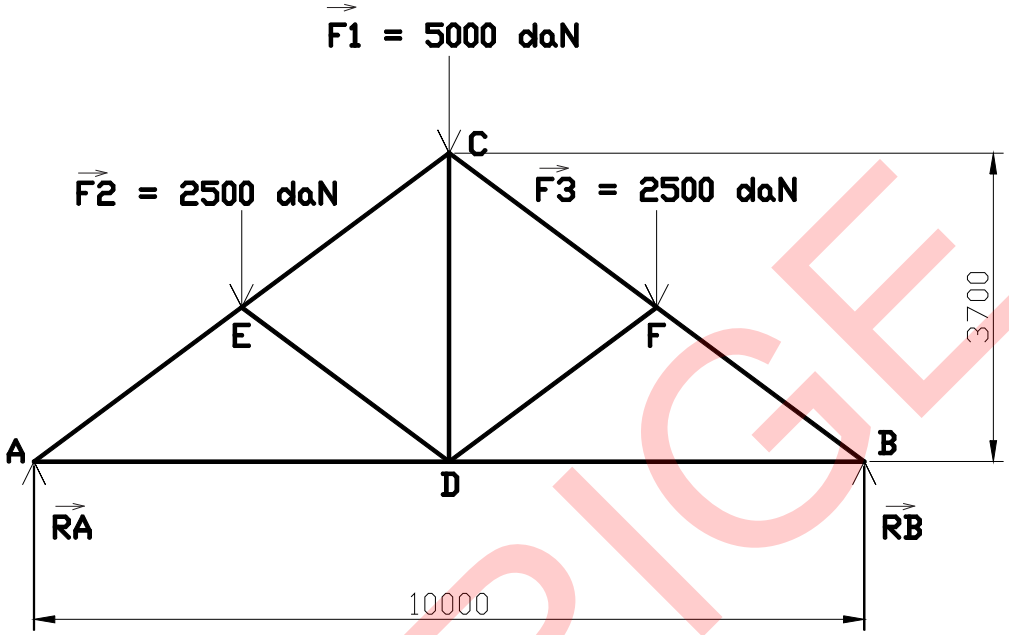
Conventions : Comprimée -<--------->- Tendue ->------<-



CORRIGE

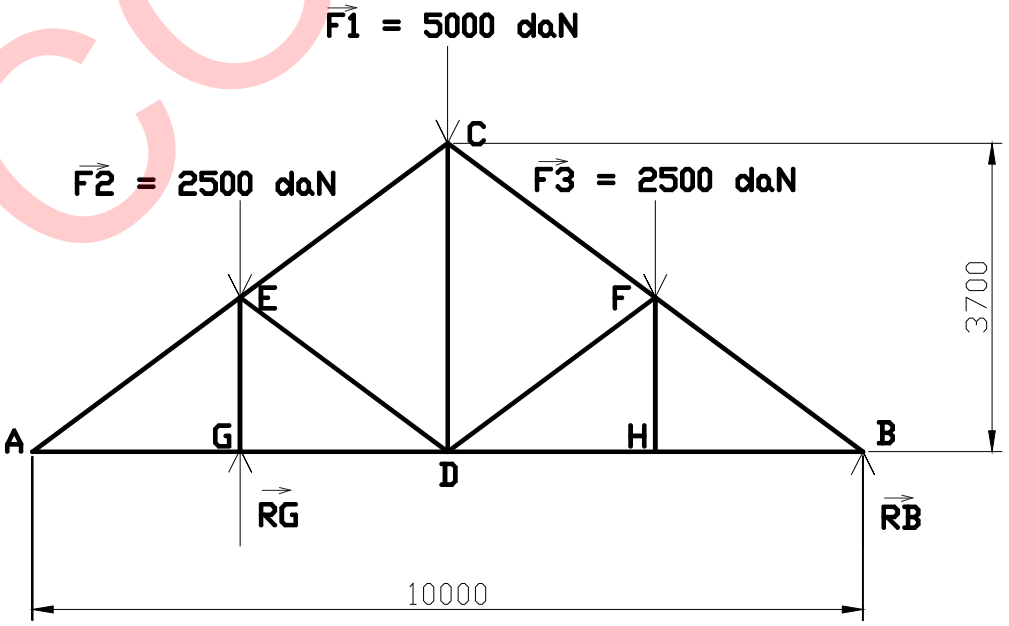
Travail n° 1:

Dessiner schématiquement cette ferme à l'échelle 1:50
Déterminer les forces de réaction $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$ (méthode graphique: dynamique et funiculaire)
déterminer les valeurs et la nature des efforts dans chaque barres

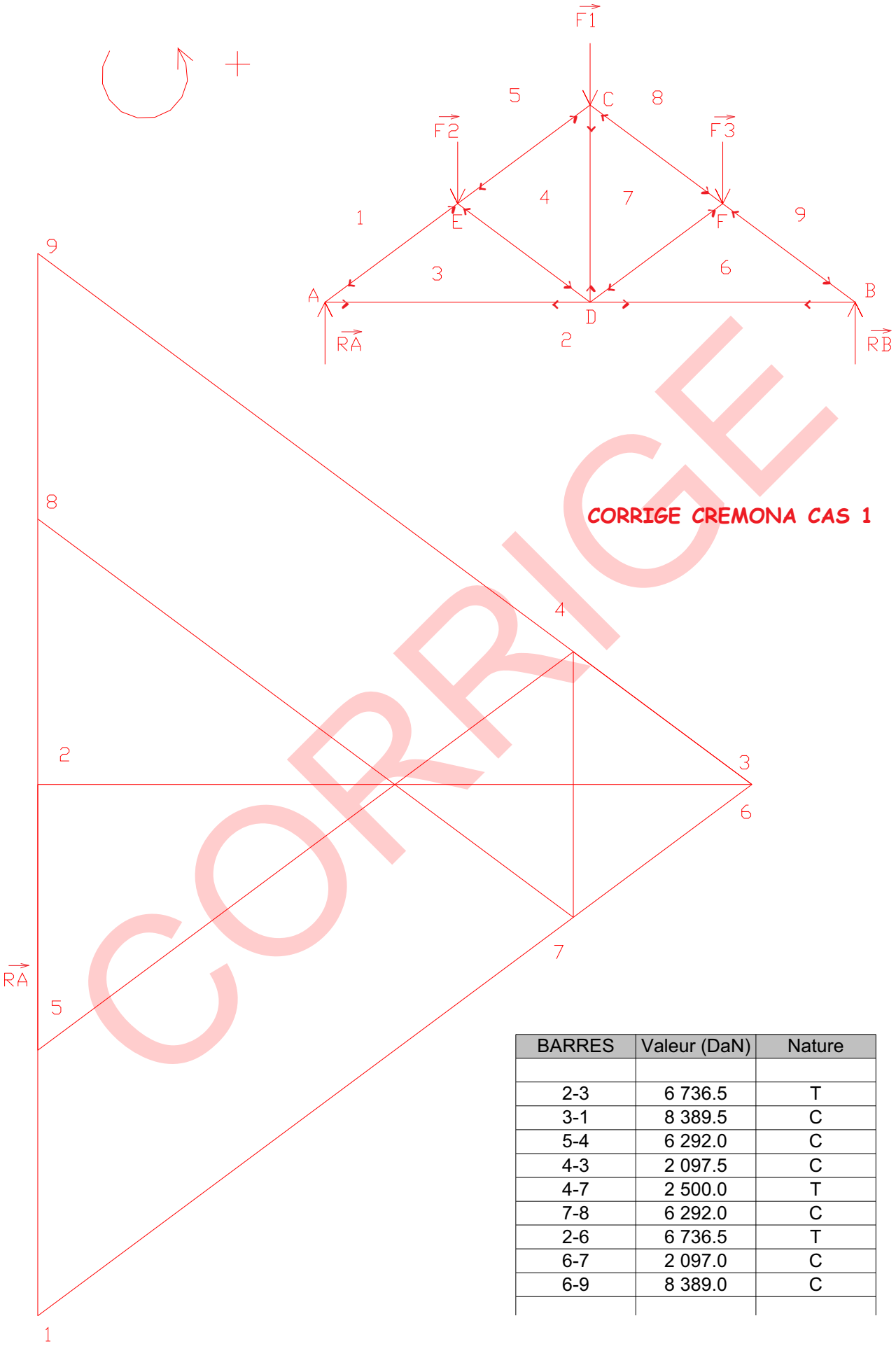


Travail n° 2:

Dessiner schématiquement cette ferme à l'échelle 1:50
Déterminer les forces de réaction $\vec{RG}$ et $\vec{RB}$ (méthode graphique: dynamique et funiculaire)
déterminer les valeurs et la nature des efforts dans chaque barres



CORRIGE



CORRIGE

CORRIGE CREMONA CAS 1

BARRES	Valeur (DaN)	Nature
2-3	6 736.5	T
3-1	8 389.5	C
5-4	6 292.0	C
4-3	2 097.5	C
4-7	2 500.0	T
7-8	6 292.0	C
2-6	6 736.5	T
6-7	2 097.0	C
6-9	8 389.0	C

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

CORRIGE

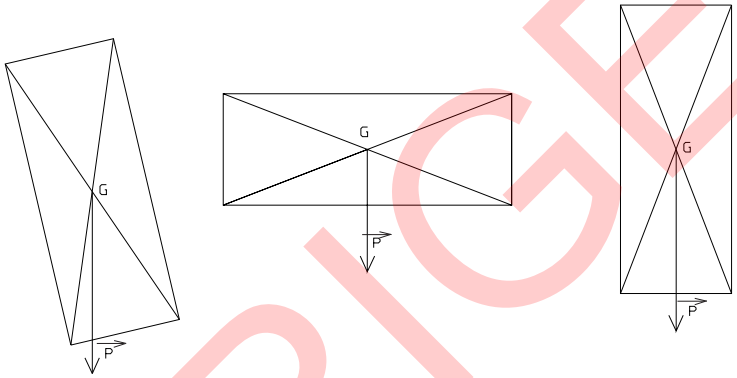
Centre de gravité

1 - Définition

Le centre de gravité G d'un système matériel est le point par lequel passe la ligne d'action de la résultante des forces de pesanteur du système.

Cette propriété est vérifiée quelque soit la position du système dans l'espace

Exemple :

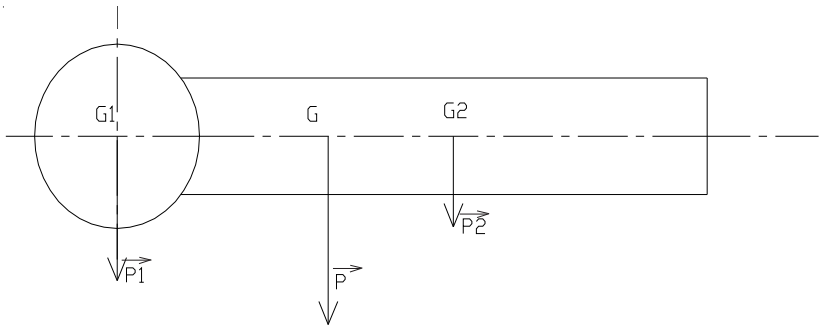


2 - Propriétés

Si un solide possède un plan ou un axe de symétrie, son centre de gravité est situé dans ce plan ou cet axe de symétrie

3 - Solides composés : Principe

Le centre de gravité G d'un solide compsé de 2 autres solides dont les centres de gravité sont G1 et G2 est situé sur la droite (G1,G2)

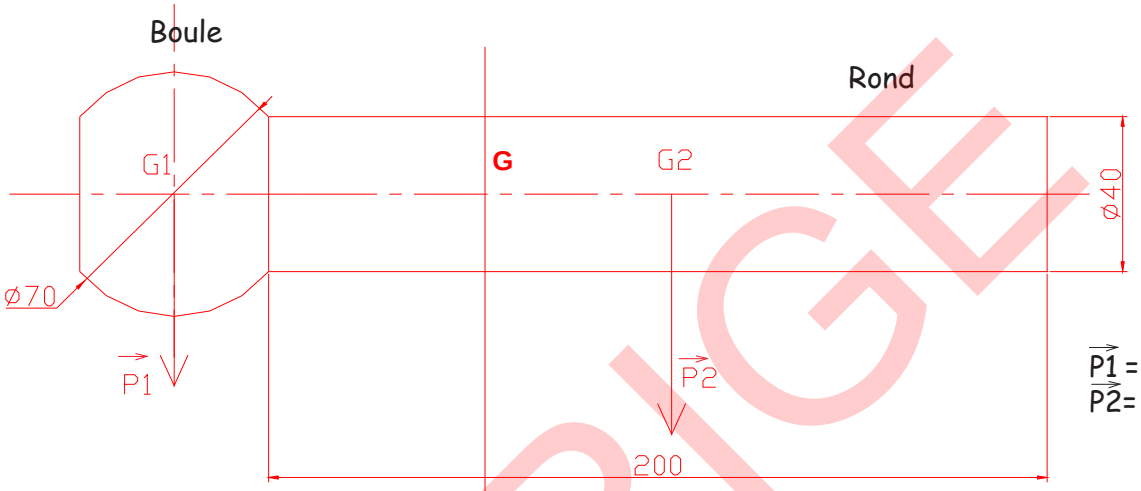


CORRIGE

4 - Solides composés : méthode

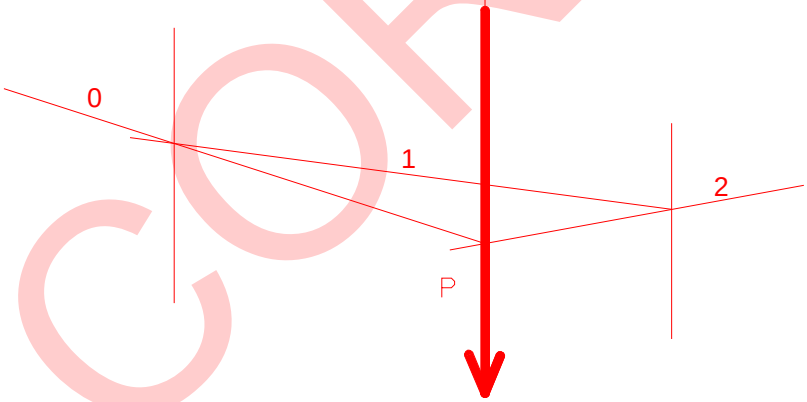
- *Décomposer l'ensemble en sous-ensemble dont les centre de gravité sont déterminable soit G1, G2 etc*
- *Soit P1, P2 etc le poids de chaque sous-ensemble*
- *Le poids P du solide (l'ensemble) est la résultante de P1 + P2 + etc*

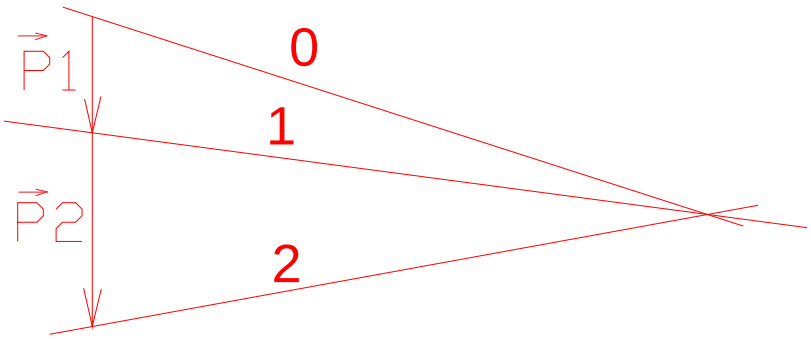
- *La reherche du centre de gravité G de l'ensemble revient à chercher la position de l'ensemble*



$\vec{P1}$ = 3 DaN
$\vec{P2}$= 5 DaN

Déterminer le centre de gravité de cet ensemble.





Dynamique
Ech. : 1 DaN = 5 mm

CORRIGE

5) - Exercice d'application

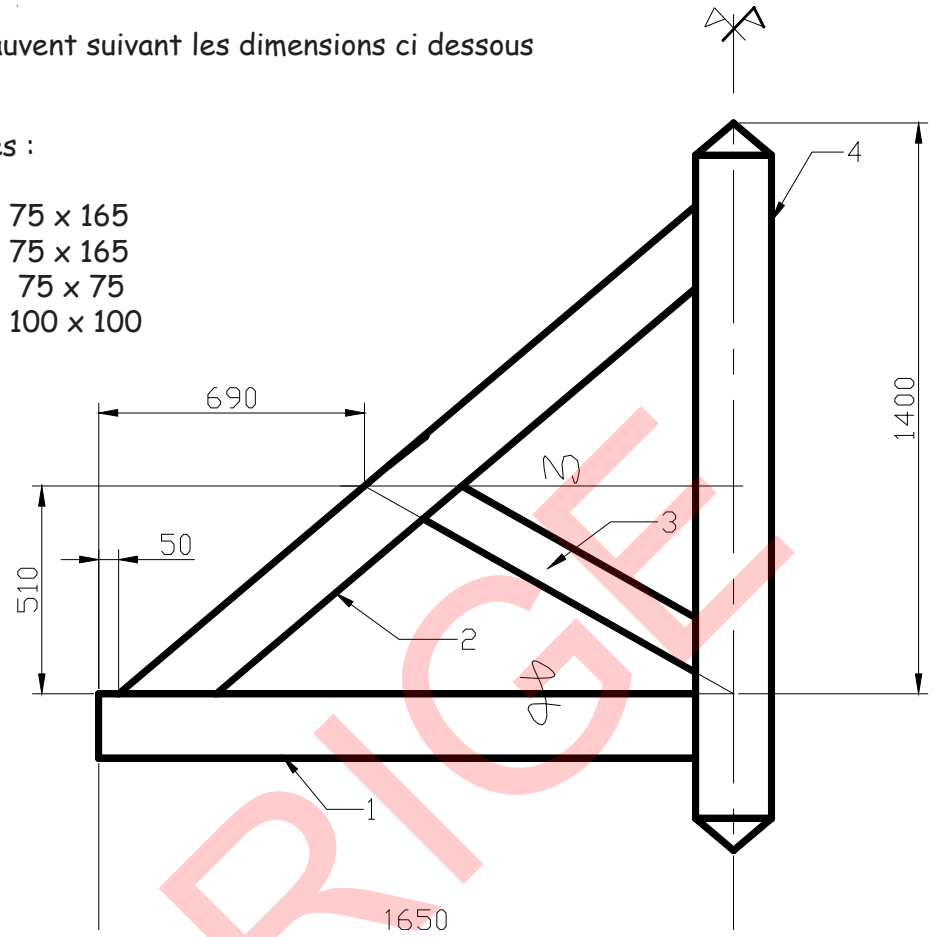
Soit une demi-ferme de auvent suivant les dimensions ci dessous

Inventaires des pièces :

1 - entrait : 75 x 165
2 - arbaletrier : 75 x 165
3 - contrefiche : 75 x 75
4 - poinçon : 100 x 100

Bois utilisé :

Pin sylvestre
densité 550 DaN/m³
à 15 % d'humidité



a - Dessiner sur un format A2V à l'échelle 1:5 l' épure de cette 1/2 ferme.

b - Compléter le tableau ci dessous afin de déterminer le poids de chaque pièce (trouver les différentes longueur sur le dessin)

N°	Eléments	Q	Ep.	Largeur	Longueur	Volume	Poids
1	Entrait	1	75	165	1600	0.0198	10.89
2	Arbalétrier	1	75	165	1982	0.0245	13.49
3	Contrefiche	1	75	75	850	0.0048	2.63
4	Poinçon	1	100	100	1730	0.0173	9.52

c - Rechercher la direction et la position de la résultante de cette demi-ferme.

d - Si le centre de gravité G est nécessaire, quelle méthode proposeriez vous ?

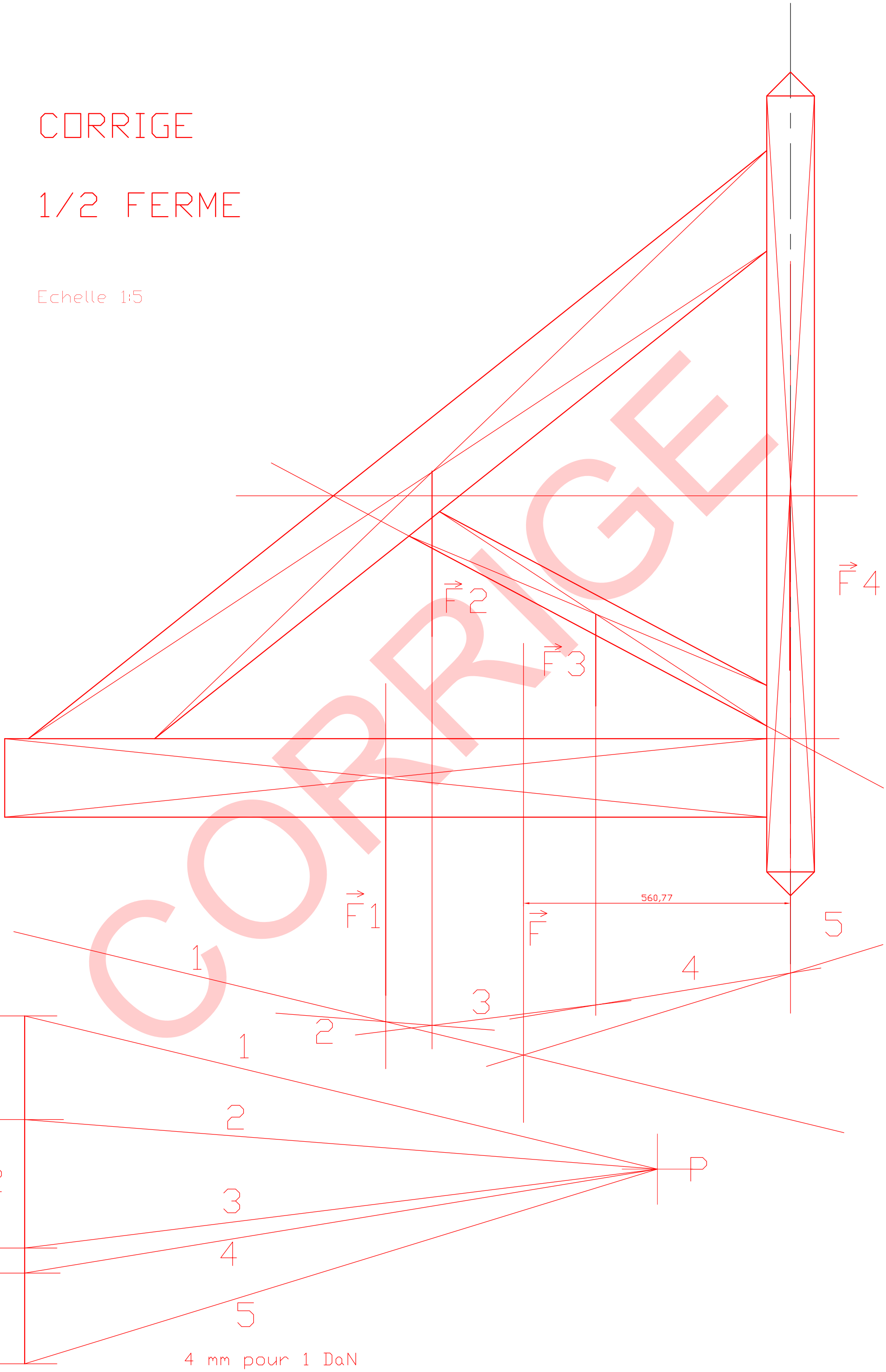
Refaire la même construction mais en tournant l'ensemble de 90°

CORRIGE

CORRIGE

1/2 FERME

Echelle 1:5



4 mm pour 1 DaN

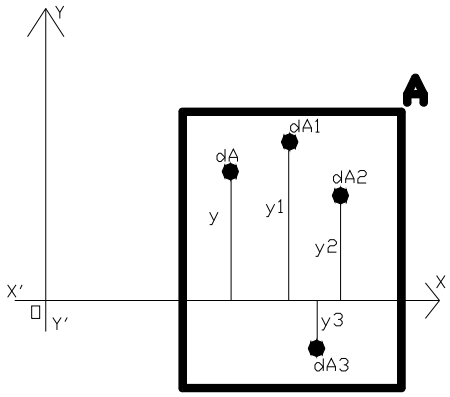
CORRIGE

Moment statique

Intervient dans le calcul de la contrainte de cisaillement.

1 - Définitions :

Considérons un élément de surface dA très très ..... petit.



On appelle **moment statique de l'élément dA par rapport à l'axe X'X**,le produit :

Y * dA

Y étant la distance de dA par rapport à l'axe considéré affecté du signe + ou - selon la position de dA par rapport à X'X.

On appellle moment statique de la surface A par rapport à l'axe X'X la somme algébrique des moments statiques par rapport à cet axe X'X de tous les éléments.

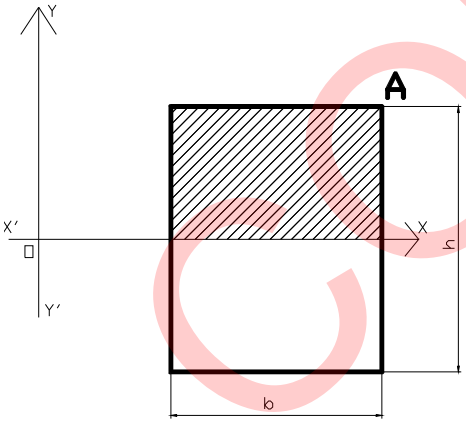
$MS_{X'X} = dA \times y + dA1 \times y1 + dA2 \times y2 - dA3 \times y3 + ...$

2 - Théorème :

On démontre que le moment statique d'une surface A par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de l'aire A de la surface par la distance YG de son centre de gravité à l'axe soit :

$MS_{X'X} = S \times Y_G$

(L'unité SI est le m^3)
(L'unité usuelle est le cm^3)



Exemple :

Moment statique de la partie supérieure par rapport à l'axe X'X (milieu de h).

$S = b \times h/2 \qquad Y_G = h / 4$

$MS_{X'X} = (b \times h/2) \times (h / 4) = \frac{b.h^2}{8}$

Moment statique de la partie inférieure par rapport à l'axe X'X (milieu de h).

$S = b \times h/2 \qquad Y_G = - h / 4$

$MS_{X'X} = (b \times h/2) \times -(h / 4) = \frac{-b.h^2}{8}$

Moment statique du rectangle par rapport à l'axe X'X (milieu de h).

$\frac{b.h^2}{8} - \frac{b.h^2}{8} = 0$

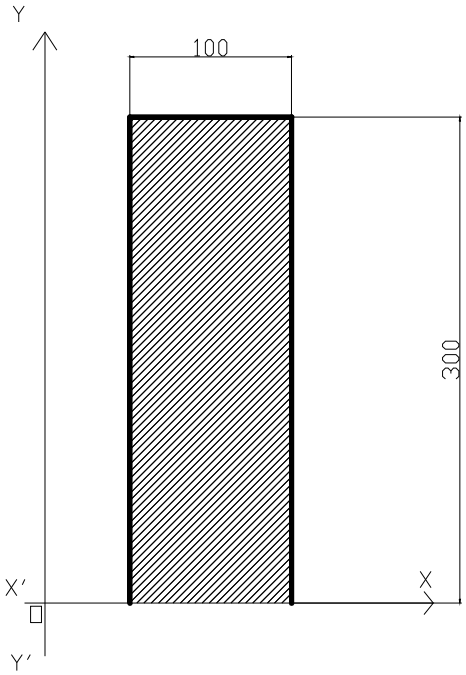
3 - Conclusion :

Le moment statique d'une surface par rapport à un axe situé sur son centre de gravité est nul

$MS_{X'X} = S \times Y_G$ et si $Y_G = 0$ alors $MS_{X'X} = 0$

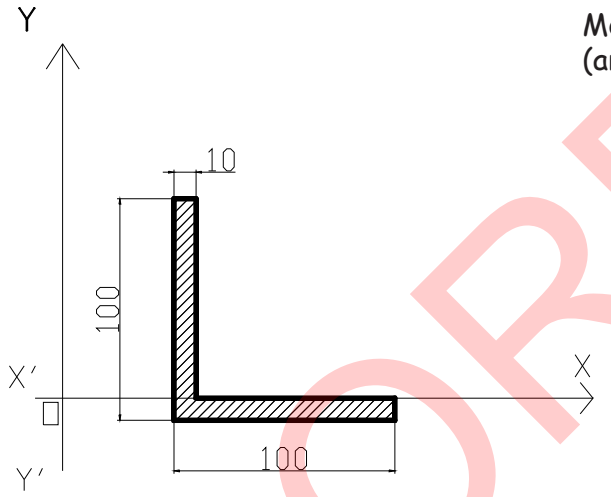
CORRIGE

4 - Exercices (toute les cotes sont en mm)



Moment statique du rectangle par rapport à X'X

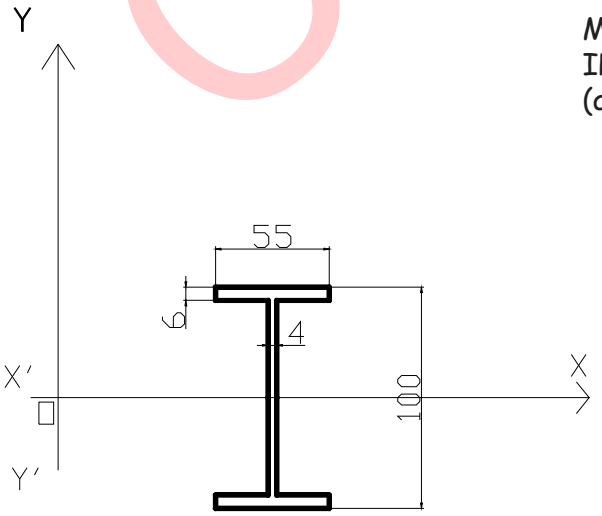
Eléments	Surface cm2	YG cm	MS cm3
1	10x30 =300	15	4 500



Moment statique de la cornière par rapport à X'X
(arrondis négligés)

Eléments	Surface cm2	YG cm	MS cm3
1	9 x 1 = 9	4.5	40.5
2	10 x 1 = 10	-0.5	-5
total	19		35.5

Y_G de l'ensemble par rapportX'X
MS= 35.5 = 1.87 cm
St 19



Moment statique de la moitié supérieure de la poutrelle IPE 100 par rapport àX'X
(arrondis négligés)

Eléments	Surface cm2	YG cm	MS cm3
1	5.5 x 0.6 =3.30	4.7	15.51
2	4.4x0.4 = 1.76	2.2	3.87
	5.06		19.38

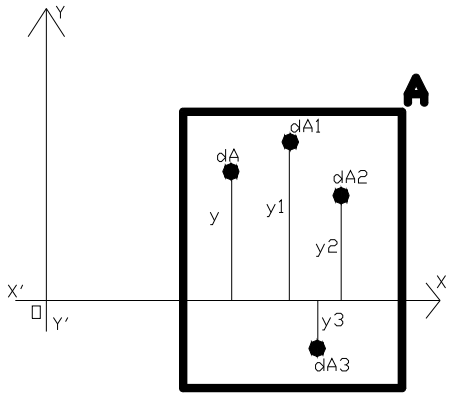
Y_G de l'ensemble / X'X MS= 19.38 = 3.83 cm
St 5.06

CORRIGE

Moment quadratique (ou moment d'inertie)

interviennent dans le calcul de la contrainte de cisaillement et de la contrainte normale (traction – compression).

1 - Définitions : Considérons un élément de surface dA très très ..... petit.



On appelle **moment quadratique (ou moment d'inertie) de l'élément dA par rapport à l'axe X'X**,le produit :

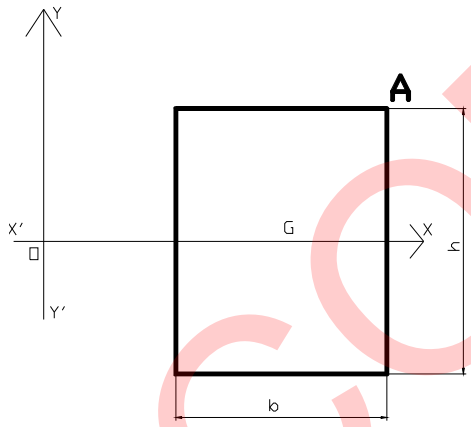
$$y^2 * dA$$

Y étant la distance de dA par rapport à l'axe considéré.

On appelle moment quadratique de la surface A par rapport à l'axe X'X la somme algébrique des moments quadratiques par rapport à cet axe X'X de tous les éléments.

$$I_{x'x} = dA \times y^2 + dA1 \times y1^2 + dA2 \times y2^2 + dA3 \times y3^2 + ...$$

2 - Moments quadratiques usuels (sans démonstration)

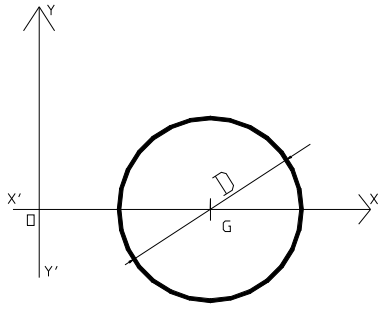


* moment quadratique d'un rectangle par rapport à l'axe passant par G (centre de gravité) et parallèle à la base.

$$I_{x'x} = \frac{b * h^3}{12}$$

(L'unité SI est le m^4)

(L'unité usuelle est le cm^4)

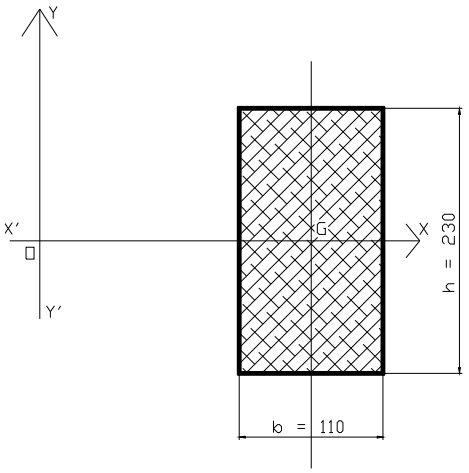


* moment quadratique d'un cercle par rapport à un de ses rayons

$$I_{x'x} = \frac{\Pi * D^4}{64}$$

CORRIGE

3 - Applications



Calculer les moments quadratique, par rapport aux deux axes (X'X et Y'Y) d'un madrier en bois de 110 x 230 .

$I_{X'X} = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{110 \times 230^3}{12} = 111\,530\,833\ cm^4$

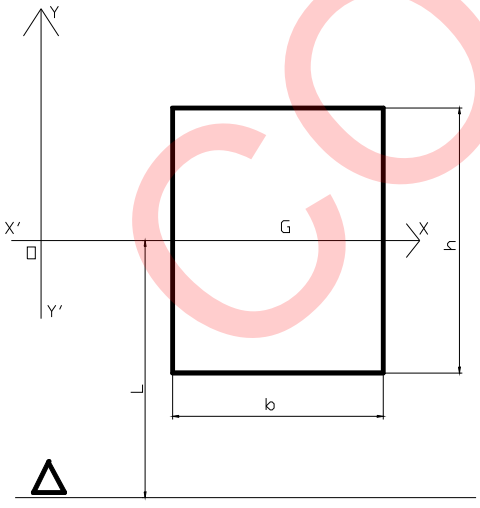
$I_{y'y} = \frac{h \times b^3}{12} = \frac{230 \times 110^3}{12} = 25\,510\,833\ cm^4$

On obtient : $I_{X'X} > I_{y'y}$

Conclusion : Le moment d'inertie jouant un rôle important dans la résistance d'une pièce, il convient de toujours disposer cette pièce de la façon la plus favorable à sa résistance: ici madrier posé sur chant.

4 - Changement d'axe (sans démonstration)

théorème de Huygens = Le moment quadratique d'une surface par rapport à un axe △ quelconque situé dans son plan est égal à :

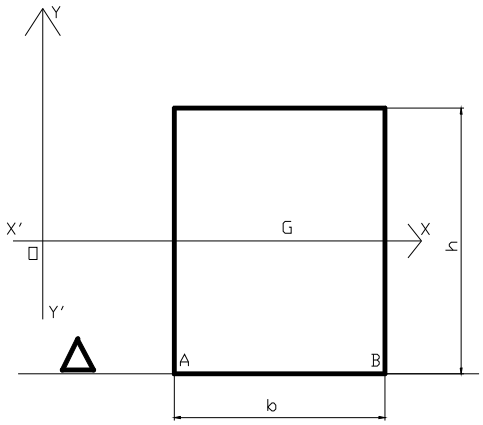


$$I_{\Delta} = I_{X'X} + S * L^2$$

où S est la surface en m^2 ou en cm^2
et L est la distance en m ou en cm

CORRIGE

5 - Application : rechercher le moment d'inertie d'un rectangle par rapport à sa base AB



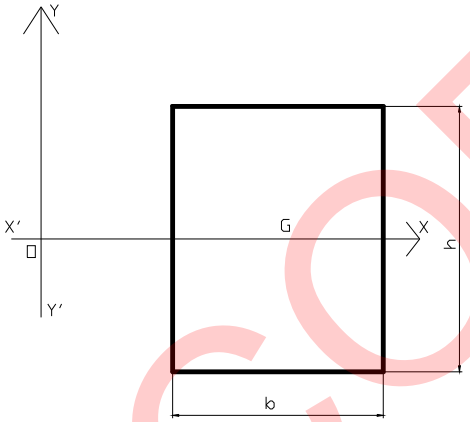
$I_{x'x} = \dfrac{b \times h^3}{12}$

$I_{\Delta} = \dfrac{b \times h^3}{12} + (b \times h) \times (h/2)^2$

$\dfrac{b \times h^3}{12} + \dfrac{b \times h^3}{4} = \dfrac{b \times h^3}{12} + \dfrac{3b \times h^3}{12} = \dfrac{4b \times h^3}{12}$

$$I_{\Delta} = \frac{b \times h^3}{3}$$

6 - Rayon de giration



L'emploi du rayon de giration est lié au problème de flambage (cours R.D.M. Compression)

$$i_{x'x} = \sqrt{\frac{I_{x'x}}{S}}$$

Cas d'un rectangle : $i_{x'x} = \sqrt{\dfrac{I_{x'x}}{S}} = \sqrt{\dfrac{\frac{b \times h^3}{12}}{b \times h}} = \sqrt{\dfrac{b \times h^3}{12\, b \times h}} = \sqrt{\dfrac{h^2}{12}}$

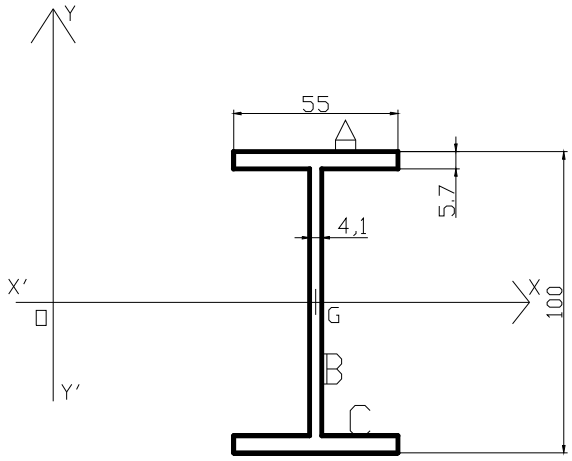
$= \dfrac{h}{\sqrt{12}}$

$$i_{x'x} = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

CORRIGE

7 - Application

Rechercher le moment d'inertie et le rayon de giration par rapport a X'X de la poutrelle IPE 100 (arrondis négligés)



On peut décomposer en trois parties A, B etC

Le momentd'inertie par rapport à l'axe X'X est égal à la somme des moments d'inertie des éléments A, B et C.

Eléments		Surfaces (cm^2)
N°	$I_{X'X}$ (cm^4)	
A	**69.78**	**3.135**
B	**23.76**	**3.633**
C	**69.78**	**3.135**
	Total	**9.903**

Le moment d'inertie total = Somme des moments d'inertie / X'X

$I_{x'x}$ = 69.78 + 23.76 + 69.78 =

$I_{X'X}$ = 163.32 cm^4

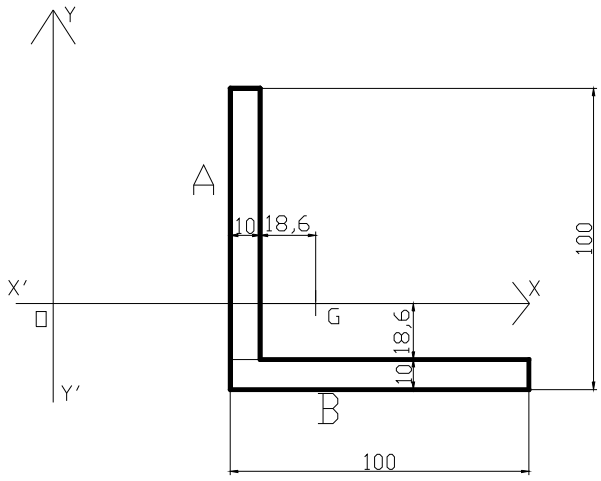
Le rayon de giration = $\sqrt{\frac{I_{X'X}}{S}} = \sqrt{\frac{163.32}{9.9}}$

$i_{X'X}$ = 4.06 cm

CORRIGE

8 - Application

Rechercher le moment d'inertie et le rayon de giration par rapport a X'X de la cornière 100 x 100 x 10 (arrondis négligés)



On peut décomposer en deux parties A et B

Le momentd'inertie par rapport à l'axe X'X est égal à la somme des moments d'inertie des éléments A et B.

Eléments		Surfaces (cm^2)
N°	$I_{X'X}$ (cm^4)	
A	**123.476**	**9**
B	**56.529**	**10**
Total		**19**

Le moment d'inertie total = Somme des moments d'inertie / X'X

$I_{x'x}$ = 123.476 + 56.529 =

$I_{X'X}$ = 180 cm^4

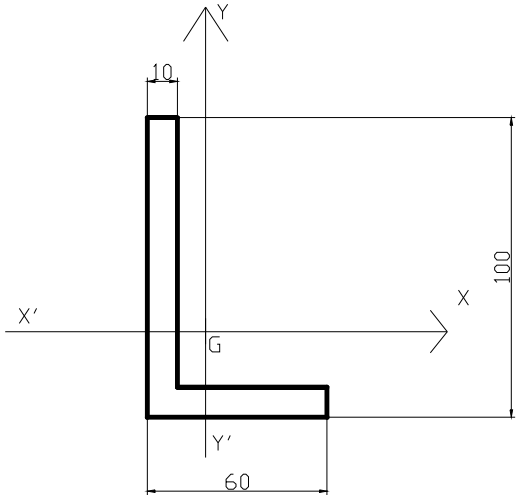
Le rayon de giration = $\sqrt{\frac{I_{x'x}}{S}} = \sqrt{\frac{180}{19}}$

$i_{X'X}$ = 3.08 cm

CORRIGE

9 - Exercice de contrôle

On donne la section plane définie par la figure ci-contre (côtes en mm)

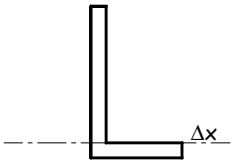


a) Déterminer le centre de gravité G; définir sa position selon les deux axes.

b) Déterminer les moments quadratiques par rapport aux axes X'X et Y'Y passant par le point G.

MODE OPERATOIRE

Par rapport à X'X

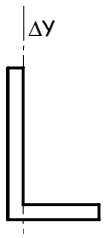


Eléments	Surfaces (cm^2)	Xg/Δy (cm)	Ms/Δy (cm^3)		I/Δy (cm^4)
A	9 X 1 = 9	4.5	40.5		243
B	6 X 1 = 6	-0.5	- 3		2
Total	15		37.5		245

Y_G = Ms / S = 37.5 / 15 = 2.5 cm

$I_{X'X}$ = $I\Delta_{x'x} - (S \times y_G^2) = 245 - (15 \times 2.5^2) = 151.25\ cm^4$

Par rapport à Y'Y



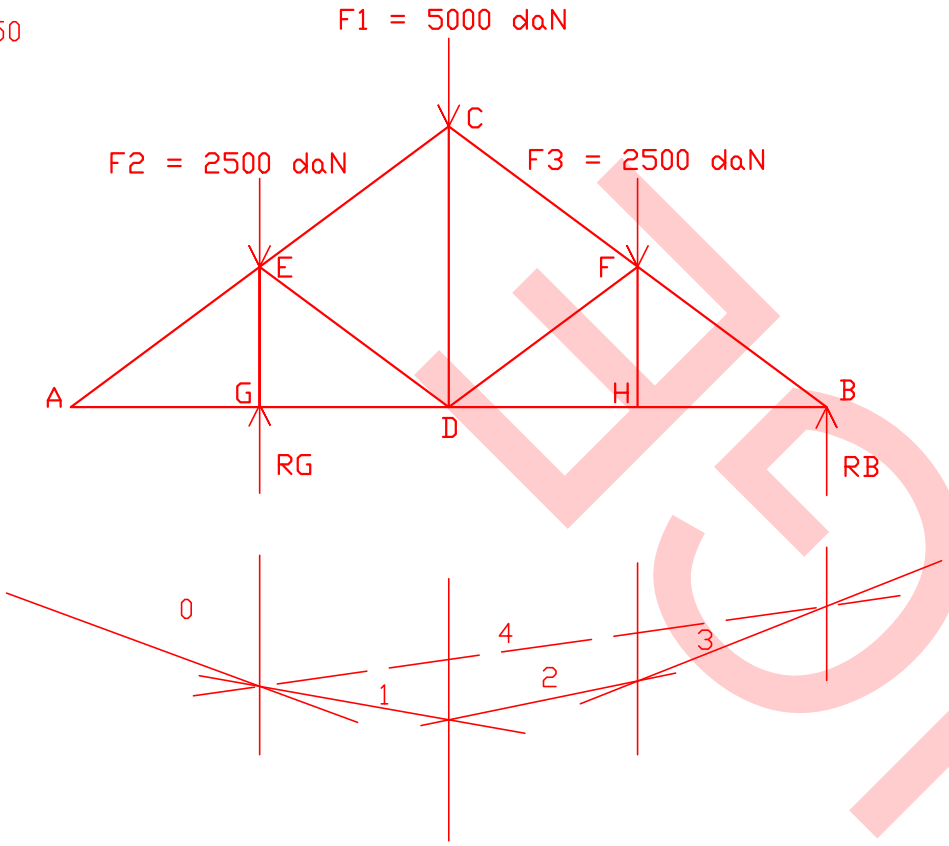
Eléments	Surfaces (cm^2)	Xg/Δy (cm)	Ms/Δy (cm^3)		I/Δy (cm^4)
A	9 X 1 = 9	-0.5	-4.5		3
B	6 X 1 = 6	2	12		42
Total	15		7.5		45

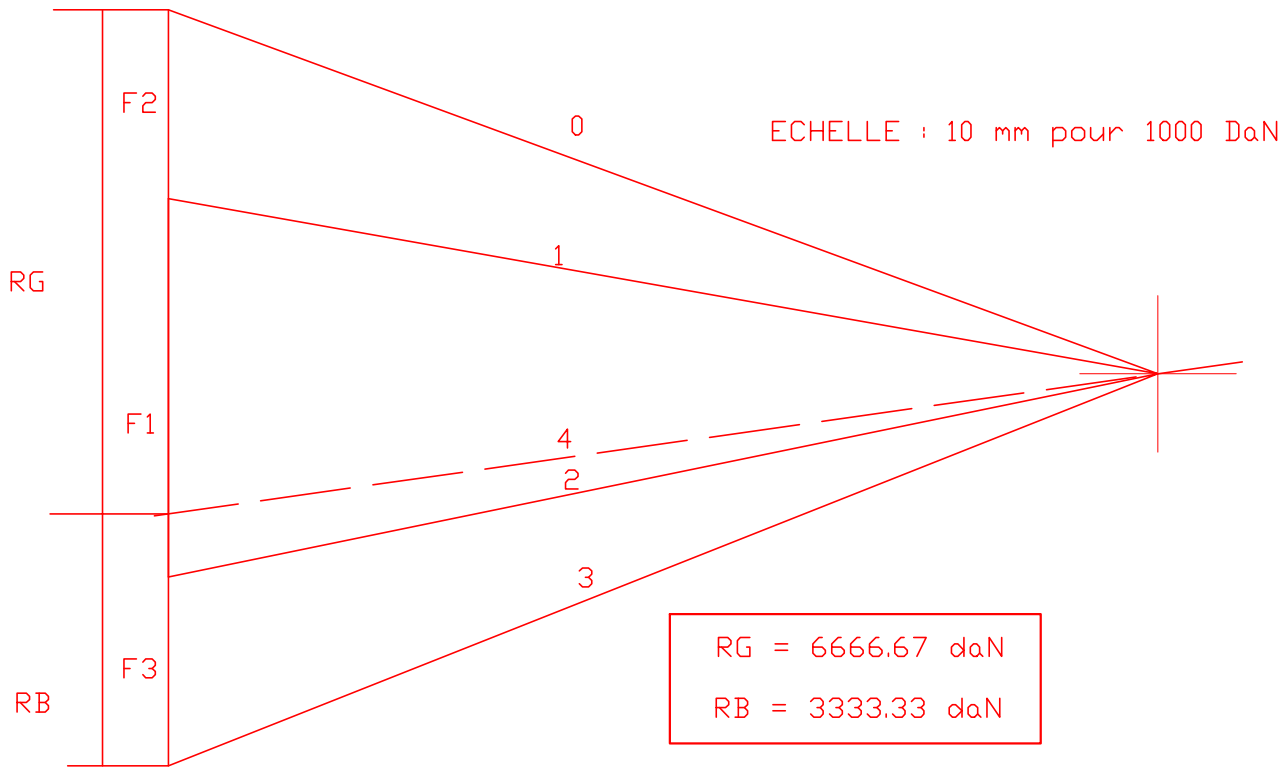
X_G = Ms / S = 7.5 / 15 = 0.5 cm

$I_{y'y}$ = $I\Delta_{y'y} - (S \times x_G^2) = 45 - (15 \times 0.5^2) = 41.25\ cm^4$

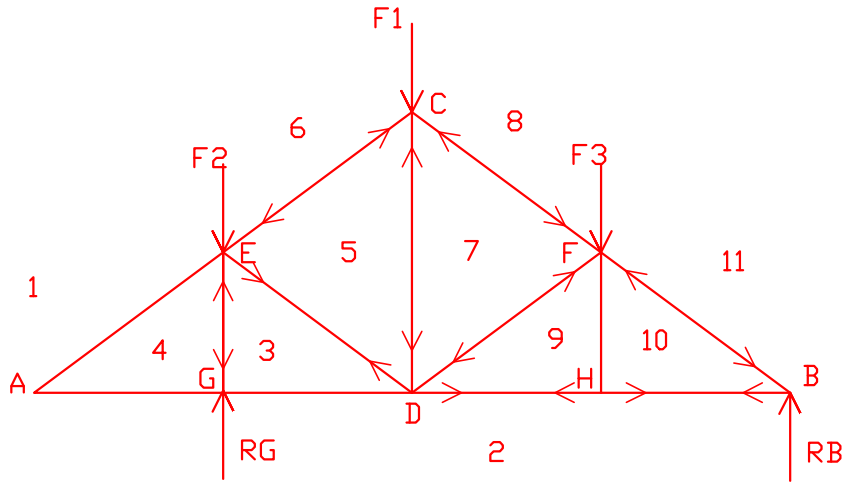
CORRIGE

ECHELLE : 1:50

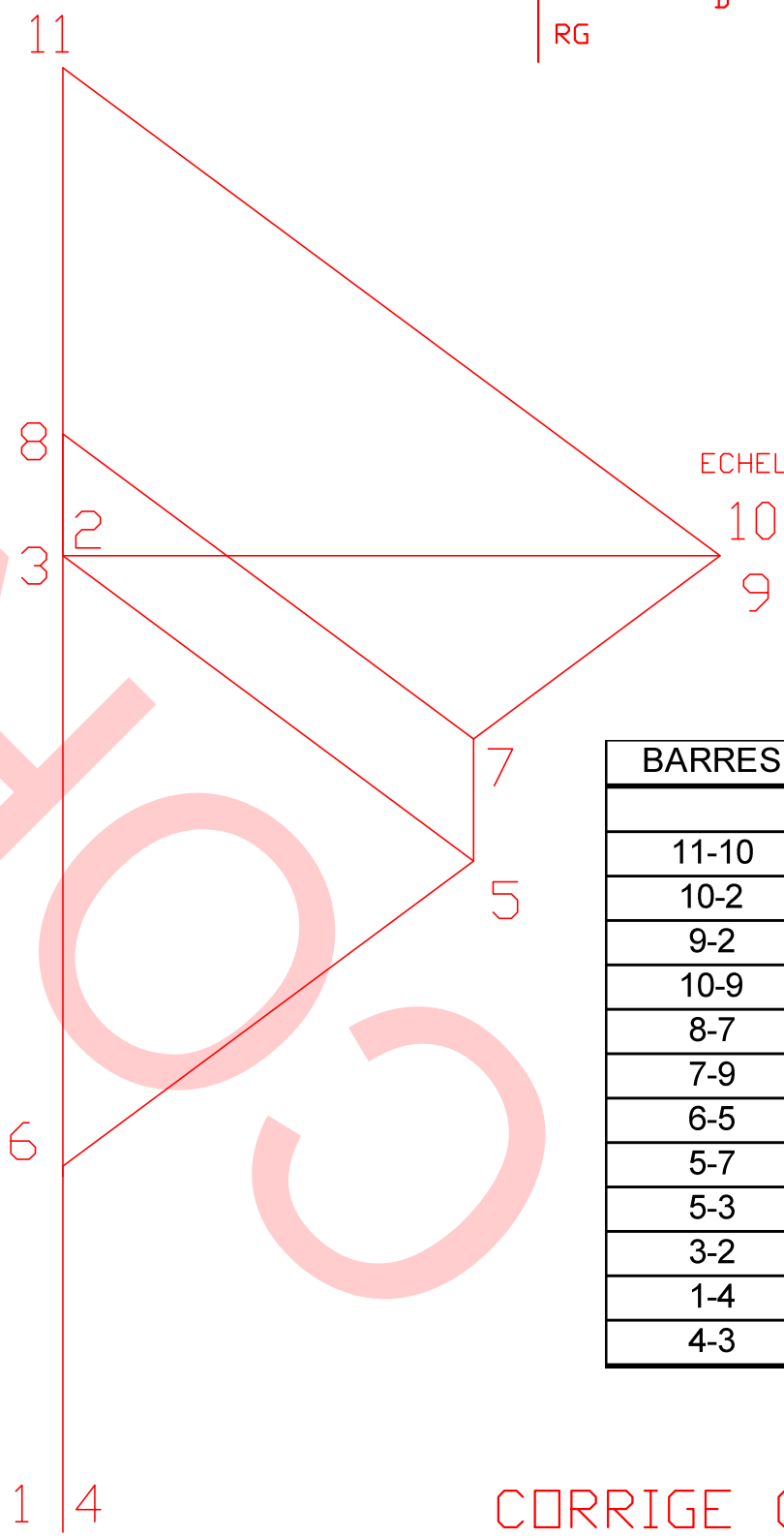




ECHELLE : 1:50



ECHELLE : 20 mm pour 1000 DaN



BARRES	Valeur (DaN)	Nature
11-10	5592	C
10-2	4491	T
9-2	4491	T
10-9	0	
8-7	3495	C
7-9	2097	C
6-5	3495	C
5-7	883	C
5-3	3495	T
3-2	0	
1-4	0	
4-3	6666	C

CORRIGE CREMONA CAS 2

CORRIGE

STATIQUE
RESOLUTION
ANALYTIQUE

CORRIGE

Principe

La méthode analytique permet de résoudre par le calcul les équilibres de systèmes soumis à des actions dans l'espace. Ces actions peuvent être parallèles ou concourantes.

Pour l'étude des solides en équilibre on applique le principe fondamental de la statique :

Somme des Actions extérieures	**= 0**	$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$
Somme des Moments	**= 0**	$\Sigma \vec{M} = \vec{0}$

Dans le cas de forces coplanes situées dans un plan OXY nous avons à notre disposition 3 équations

$$\Sigma \vec{F}x = \vec{0}$$
$$\Sigma \vec{F}y = \vec{0}$$
$$\Sigma \vec{M}z = \vec{0}$$

Voir statique page 11 et 12

CORRIGE

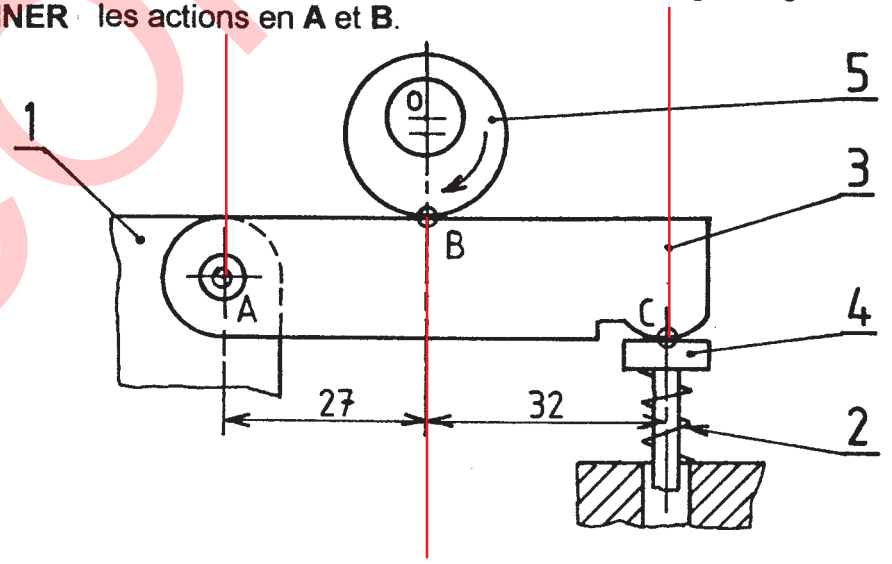
Application pratique

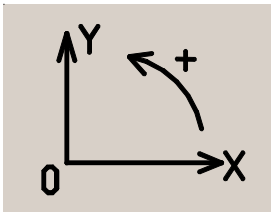
Soit le levier **3** articulé en **A**.

Hypothèses simplificatrices : Poids des éléments négligés.
Contacts et articulations parfaits.

Données : La tension du ressort **2** est, dans ce cas de figure égale à **20 N**.

■ **-DETERMINER** les actions en **A** et **B**.





Forces coplanes donc 3 équations

$\Sigma \vec{F}x = \vec{0}$
$\Sigma \vec{F}y = \vec{0}$

$\Sigma \vec{M}z = \vec{0}$

Dans ce cas nous pouvons affirmer que $\Sigma \vec{F}x = \vec{0}$ (toutes les projections sont nulles)
2 forces parallèles alors la 3ème aussi

1° - Il faut vérifier que $\Sigma \vec{F}y = \vec{0}$ => $\vec{R}A + \vec{R}B + \vec{R}C = \vec{0}$

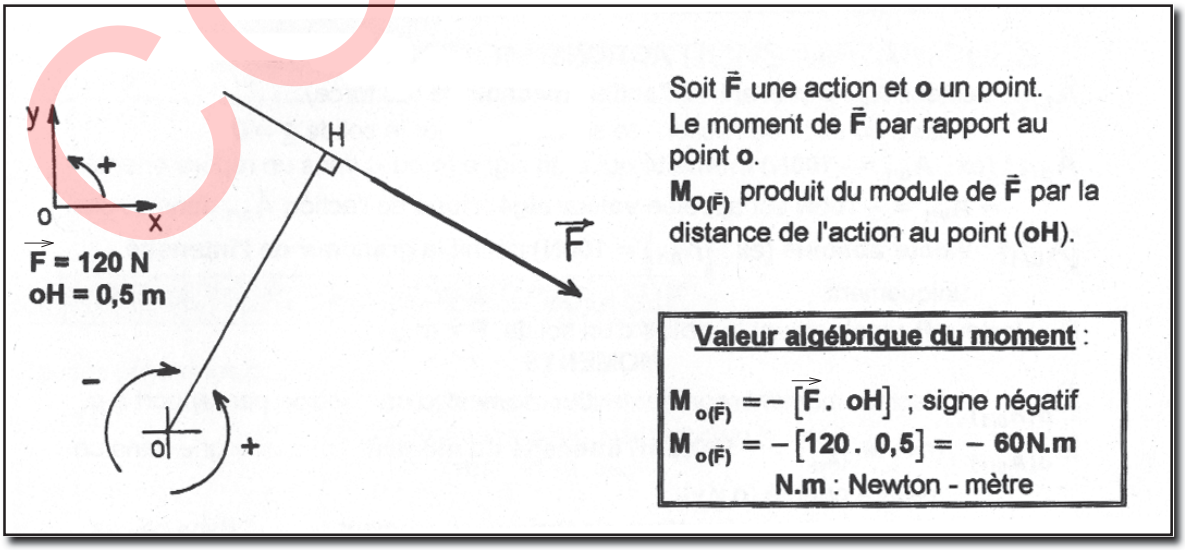
$\| \overrightarrow{RA} \| - \| \overrightarrow{RB} \| + \| \overrightarrow{RC} \| = 0$
=> RA = RB - RC
=> RA = RB -20 en N
(RA = RB - 2 en DaN)

2° - Il faut vérifier que $\Sigma \vec{M}/z = \vec{0}$ Ceci pour n'importe quel point;
Il sera judicieux de choisir un point qui élimine une inconnue (ici le point A par exemple)

=> $\Sigma \vec{M}/A = \vec{0}$ => $M\overrightarrow{RC}_{/A} + M\overrightarrow{RA}_{/A} + M\overrightarrow{RB}_{/A} = \vec{0}$
$M\overrightarrow{RA}_{/A} = \vec{0}$

CORRIGE

Rappel : Moment d'un vecteur par rapport à un point



=> $\vec{M}_{R C/A} + \vec{M}_{R B/A} = \vec{0}$

=> $+ [\ \| \vec{RC} \| \times d_c\ ] - [\ \| \vec{RB} \| \times d_B\ ] = 0$

=> $+ [\ 20 \times 59\ ] - [\ RB \times 27\ ] = 0$

=> $\| \vec{RB} \| = \frac{20 \times 59}{27} = \frac{1\,180}{27} = 43.70\ N$

Revenir à l'équation du 1° et en déduire

$\| \vec{RA} \| =$ 43.70 - 20 = 23.70 N

CORRIGE

Rappels

Si forces parallèles

1) Il y a une équation de moments et une équation de forces :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \qquad \Sigma \vec{M} = \vec{0}$$

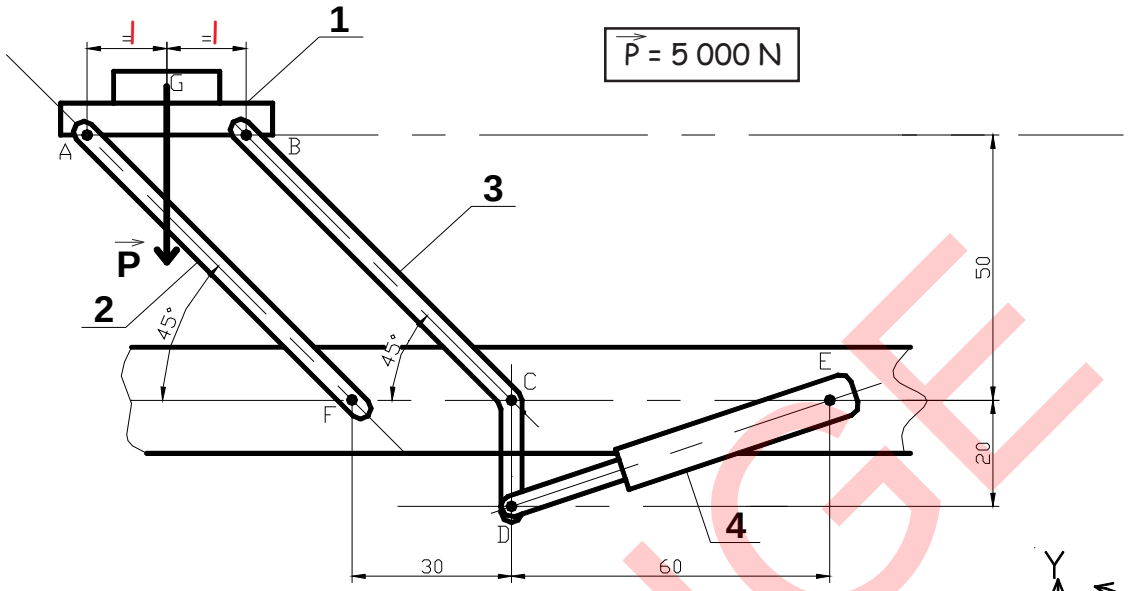
Si forces non parallèles

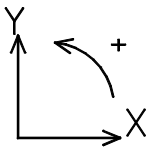
1) Il y a deux équations de moments et deux équations de forces :

$$\Sigma \vec{F}x = \vec{0} \qquad \Sigma \vec{F}y = \vec{0}$$
$$\Sigma \vec{M}_{\vec{F}} = \vec{0}$$

Exercices d'application

1 - Déterminer par le calcul les actions exersant sur les différentes articulations de ce dispositif de levage : (voir page 29)

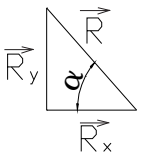




Rappels :

$\Sigma \vec{F}x = \vec{0}$
$\Sigma \vec{F}y = \vec{0}$
$\Sigma \vec{M}/z = \vec{0}$

Sin $\alpha = \vec{Ry}/\vec{R}$
Cos $\alpha = \vec{Rx}/\vec{R}$



Méthode :

1) Isoler le solide 2 — 2 forces => $\vec{RA} = -\vec{RF}$ (voir page 8)
La direction est la droite (AF)

2) Isoler le solide 1 — $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ => $\vec{RA} + \vec{RB} + \vec{P} = \vec{0}$

Sur Ox $\vec{RAx} + \vec{RBx} = \vec{0}$ => $RA\cos45° + RB\cos45° = 0$ => $RA = RB$

Sur Oy $\vec{RAy} + \vec{RBy} + \vec{P} = \vec{0}$ => $RA\sin45° + RB\sin45° - P = 0$

$\Sigma \vec{M}_{/A} = \vec{0}$ => $\vec{MP}_{/A} + \vec{MRA}_{/A} + \vec{MRB}_{/A} = \vec{0}$

$-P \times l + RBy \times 2l = 0$ => $RBy = \frac{P \times l}{2l} = P/2 = 2\,500$ N

=> $RB = RBy/\sin45° = 3\,535.53$ N

Nota $Py = 0$ => $RA = 3\,535.53$ N

$MRBx_{/A} = 0$ => $RF = 3\,535.53$ N

CORRIGE

3) Isoler le solide 4

2 forces => $\vec{RE} = -\vec{RD}$ => RE = RD

La direction est la droite (ED)

l'angle β => Tanβ = 20/60 => β = 18.435°

4) Isoler le solide 3

$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ => $\vec{RB} + \vec{RC} + \vec{RD} = \vec{0}$

Sur Ox $\vec{RBx} + \vec{RCx} + \vec{RDx} = \vec{0}$

Sur Oy $\vec{RBy} + \vec{RCy} + \vec{RDy} = \vec{0}$

$\Sigma \vec{M}_{/C} = \vec{0}$ => $\vec{MRB}_{/C} + \vec{MRC}_{/C} + \vec{MRD}_{/C} = \vec{0}$

RBx x 50 + RBy x 50 - RDx x 20 + RDy x 0 = 0

RBcos45° x 50 + RBsin45° x 50 - RDx x 20 = 0

RDx = (RBcos45° x 50 + RBsin45° x 50) / 20

RDx = (3 535.53 x cos45° x 50 + 3 535.53 x sin45° x 50) / 20

RDx = 12 500 N

cosβ = RDx / RD => RD = 13 176 N

sinβ = RDy / RD => RDy = 4 166.67 N

tanβ = RDy / RDx

Sur Ox RCx = RDx + RBx => 12 500 + 2 500 = 15 000 N

Sur Oy RCy = RDy + RBy => 4166.67 + 2 500 = 6 666.67 N

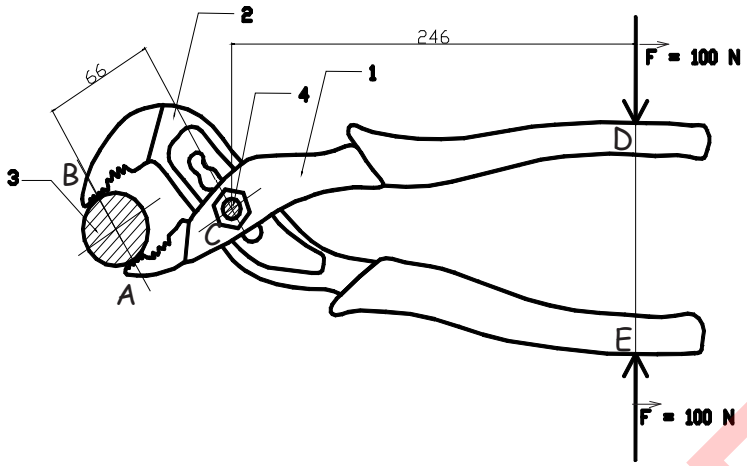
$RC^2 = RCx^2 + RCy^2$ => RC = 16 414.7 N

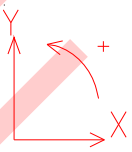
Nota Choisir le point C car il y a plus d'une inconnue

Attention au sens de RB

CORRIGE

Déterminer par le calcul les actions que la pince exerse sur la boule : (voir page 30)





Rechercher uniquement le rapport $\vec{FA}$ / $\vec{F}$

1) Isoler le solide 3

2 forces => $\vec{FA} = -\vec{FB}$
La direction est la droite (AB)

2) Isoler le solide 1

$\Sigma \vec{M}_{/C} = \vec{0}$ => $\vec{MF}_{/C} + \vec{MFA}_{/C} + \vec{MFC}_{/C} = \vec{0}$

$\vec{MFC}_{/C} = \vec{0}$

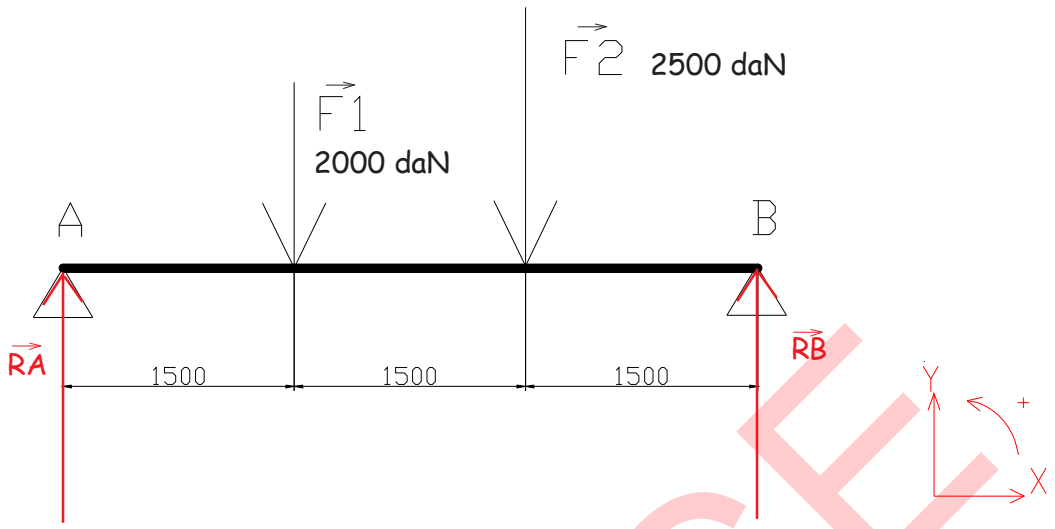
FA x 66 - F x 246 = 0

$\vec{FA}$

$FA = \frac{100 \times 246}{66} = 372.73$ N

CORRIGE

Déterminer par le calcul les forces de réaction $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$: (voir page 36)



$\Sigma \vec{F}_{/0x} = \vec{0}$ *Toujours vrai !*

$\Sigma \vec{F}_{/0y} = \vec{0}$ => $\vec{RA} + \vec{F1} + \vec{F2} + \vec{RB} = \vec{0}$

Sur Oy $RA + RB = F1 + F2$

$\Sigma \vec{M}_{/A} = \vec{0}$ => $M\vec{RA}_{/A} + M\vec{RB}_{/A} - M\vec{F1}_{/A} - M\vec{F2}_{/A} = \vec{0}$

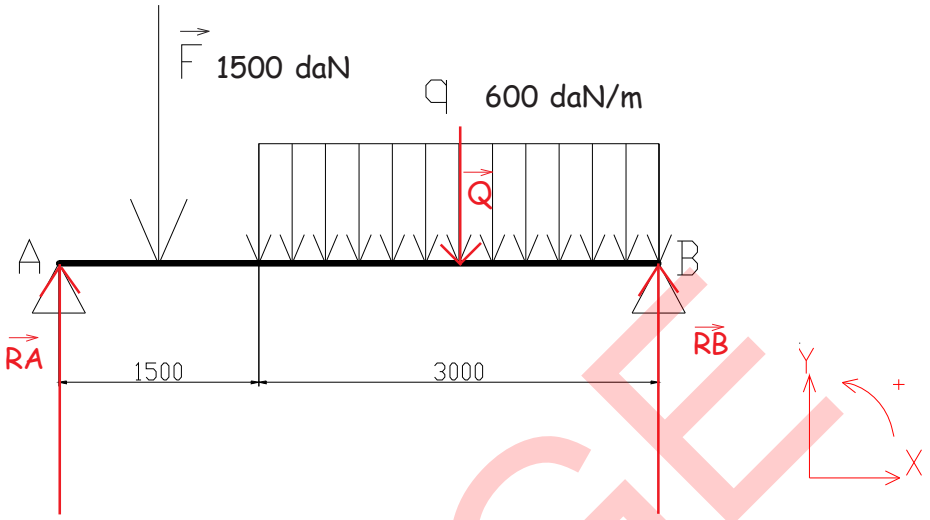
$0 + RB \times 4.50 - 2\,000 \times 1.50 - 2\,500 \times 3.00 = 0$

$$RB = \frac{2\,000 \times 1.50 + 2\,500 \times 3.00}{4.50} = 2\,333.33 \text{ daN}$$

$RA = F1 + F2 - RB = 2\,000 + 2\,500 - 2\,333.33 = 2\,166.67$ daN

CORRIGE

Déterminer par le calcul les forces de réaction $\vec{RA}$ et $\vec{RB}$



$Q = q \times l = 600 \times 3.00 = 1\,800$ daN

$\Sigma \vec{F}_{/0x} = \vec{0}$ Toujours vrai !

$\Sigma \vec{F}_{/0y} = \vec{0}$ => $\vec{RA} + \vec{F} + \vec{Q} + \vec{RB} = \vec{0}$

Sur Oy $RA + RB = F + Q$

$\Sigma \vec{M}_{/A} = \vec{0}$ => $M\vec{RA}_{/A} + M\vec{RB}_{/A} - M\vec{F}_{/A} - M\vec{Q}_{A} = \vec{0}$

$0 + RB \times 4.50 - 1\,500 \times 0.75 - 1\,800 \times 3.00 = 0$

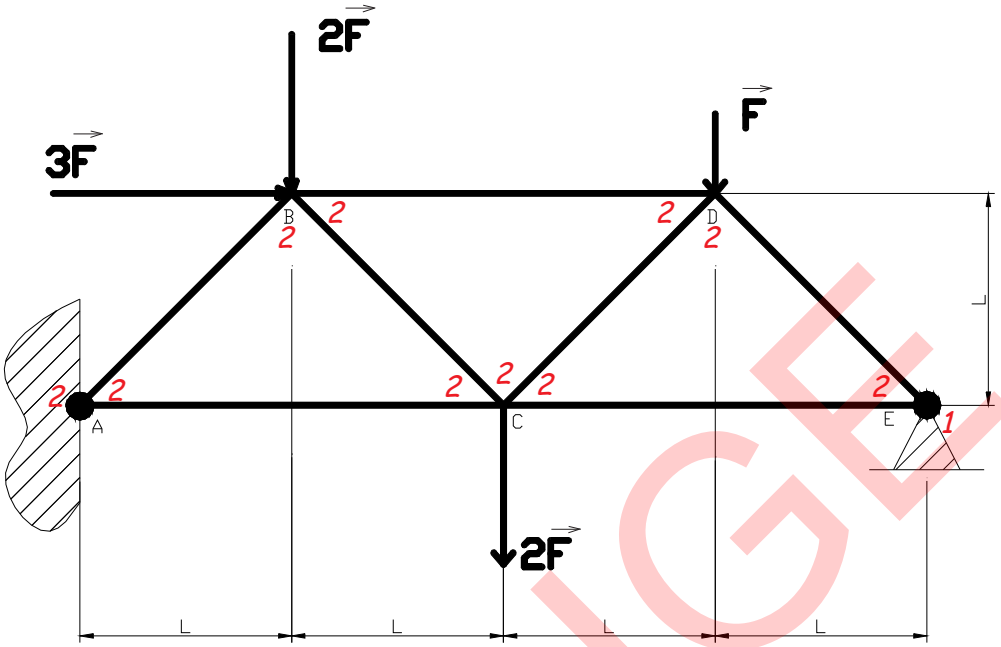
$RB = \dfrac{500 \times 0.75 + 1\,800 \times 3.00}{4.50} = 1\,450$ daN

$RA = F + Q - RB = 1\,500 + 1\,800 - 1\,450 = 1\,850$ daN

CORRIGE

la figure ci dessous représente la modélisation de la ferme d'une charpente métallique d'un bâtiment à usage d'habitation.

Les barres constituant la structure sont bi-articulées et les charges sont appliquées aux noeuds.



Données numériques : $\vec{F}$ = 5000 N L = 1000 mm

Travail demandé

1) Déterminer les expressions du torseurs de liaisons aux points A et E en utilisant :

- la méthode analytique

2) Déterminer les efforts dans les barres en utilisant :

- la méthode graphique (crémona)
- la méthode analytique

au préalable vérifier si le système est isostatique.

7 barres avec 3 degrès de liberté = 21

2+2 + 2+2 + 2+2+2 + 2+2 + 2+1 = 21

OU

Nbre barres = 2 x nbre noeuds -3

7 barres = 2 x 5 noeuds - 3

CORRIGE

Notion de torseur :

On appelle torseur du système de forces par rapport à un point A, la somme des forces sur chaque axe ox, oy et oz et la somme des moments par rapport à chacun de ces axes. (voir page 11)

$$\{T_{\text{système de forces}}\}_A = \left\{\begin{matrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{matrix}\right\}$$

Dans le cas de structure plane le torseur du système de forces comporte trois composantes nulles

$$\{T_{\text{système de forces}}\}_A = \left\{\begin{matrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{matrix}\right\}$$

1) expression du torseur

$$\{T_{\text{système de forces}}\}_A = \left\{\begin{matrix} RA_x & 0 \\ RA_y & 0 \\ 0 & MRA_z \end{matrix}\right\} \qquad \{T_{\text{système de forces}}\}_E = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ RE_y & 0 \\ 0 & MRE_z \end{matrix}\right\}$$

$\Sigma \vec{F}/_{0x} = \vec{0}$ => $\vec{RA_x} + 3\vec{F} = \vec{0}$ => $RA_x = -3F$

$\Sigma \vec{F}/_{0y} = \vec{0}$ => $\vec{RA_y} + 2\vec{F} + 2\vec{F} + \vec{F} + \vec{RE_y} = \vec{0}$ => $RA_y + RE_y = 5F$

$\Sigma \vec{M}_{/A} = \vec{0}$ => $M\vec{RA}_{/A} + M\vec{RE}_{/A} - M3\vec{F}_{/A} - M2\vec{F}_{/A} - M2\vec{F}_{/A} - M\vec{F}_{/A} = \vec{0}$

$0 + (RE_y \times 4L) - (3F \times L) - (2F \times L) - (2F \times 2L) - (F \times 3L) = 0$

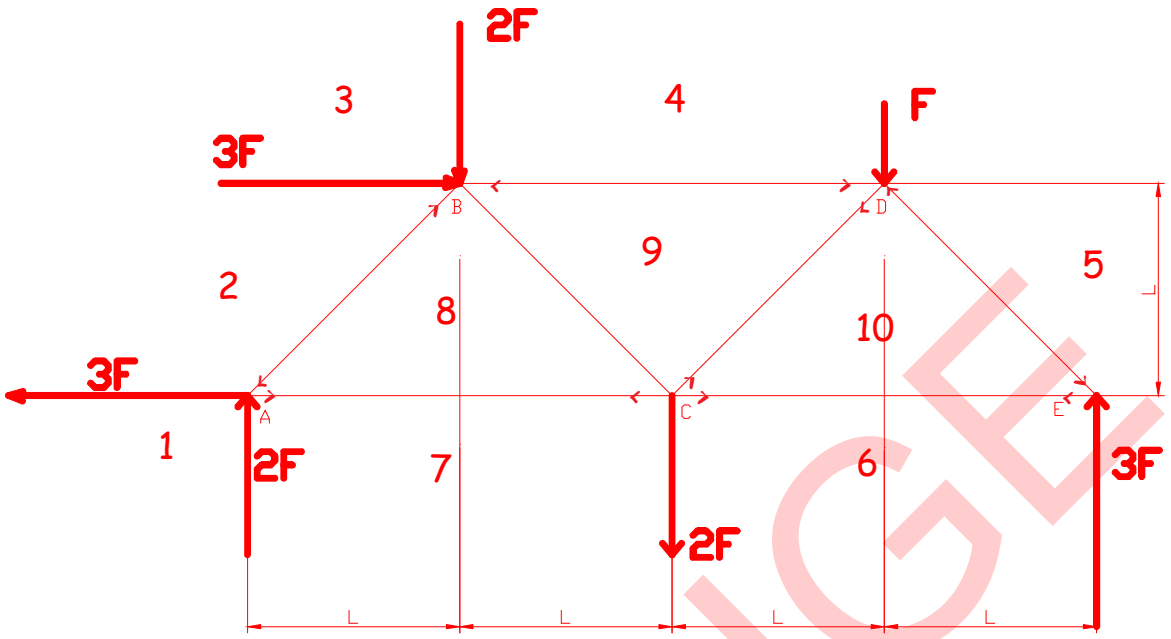
$$RE_y = \frac{(3F \times L) + (2F \times L) + (2F \times 2L) + (F \times 3L)}{4L} = \frac{12\ F \times L}{4\ L} = 3F$$

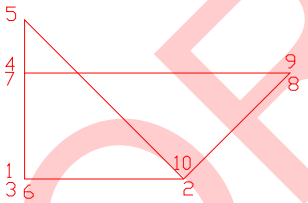
$RA_y = 5F - RE_y = 5F - 3F = 2F$

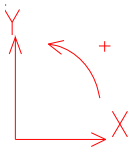
Valeurs numériques : $RE_y = 15\ 000$ N $\qquad RA_x = -15\ 000$ N $\qquad RA_y = -10\ 000$ N

CORRIGE

2) crémona





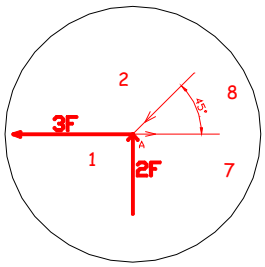


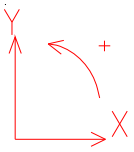
BARRES	VALEURS	NATURE
7-8	5F	T
8-2	$2\sqrt{2}F$	C
8-9	0	
9-4	5F	C
6-10	3F	T
10-9	$2\sqrt{2}F$	T
5-10	$3\sqrt{2}F$	C

CORRIGE

3) Calcul des efforts dans les barres - méthode analytique

NOEUD A





$\Sigma F/_{0x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -RA_x + R_{(7-8)} - R_{(8-2)\,x} = 0$

$-RA_x + R_{(7-8)} - R_{(8-2)} \cos 45° = 0$

$\Sigma F/_{0y} = 0 \quad \Rightarrow \quad RA_y - R_{(8-2)\,y} = 0$

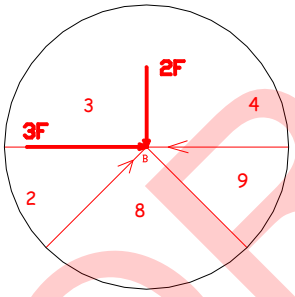
$RA_y - R_{(8-2)} \sin 45° = 0$

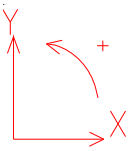
$R_{(8-2)} = \dfrac{RA_y}{\sin 45°}$

$R_{(8-2)} = \dfrac{2F}{\sqrt{2}/2} = \dfrac{4F}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,F$

$R_{(7-8)} = RA_x + R_{(8-2)} \cos 45° = 3F + 2\sqrt{2}\,F \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3F + 2F = 5F$

NOEUD B





$\Sigma F/_{0x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3F - R_{(9-4)} + R_{(2-8)\,x} + R_{(8-9)\,x} = 0$

$3F - R_{(9-4)} + R_{(2-8)} \cos 45° + R_{(8-9)} \cos 45° = 0$

$3F - R_{(9-4)} + 2\sqrt{2}\,F \cos 45° + R_{(8-9)} \cos 45° = 0$

$3F - R_{(9-4)} + 2\sqrt{2}\,F \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + R_{(8-9)} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$3F - R_{(9-4)} + 2F + R_{(8-9)} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$5F - R_{(9-4)} + R_{(8-9)} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\Sigma F/_{0y} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2F + R_{(2-8)\,y} + R_{(8-9)\,y} = 0$

$-2F + R_{(2-8)} \sin 45° + R_{(8-9)} \sin 45° = 0$

$-2F + 2\sqrt{2}\,F \sin 45° + R_{(8-9)} \sin 45° = 0$

$-2F + 2\sqrt{2}\,F \dfrac{\sqrt{2}}{2} + R_{(8-9)} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$R_{(8-9)} = 0$

$R_{(9-4)} = 5F$

ET AINSI DE SUITE .....

CORRIGE